FOURIEROV RED

⇒ Fourier je prikazao svaku funkciju $f(x)$ na nekom intervalu pomoću sume harmonika:

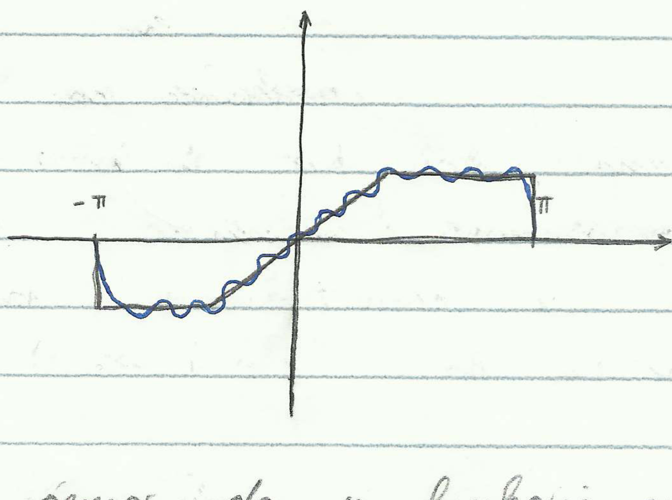
$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega x + \varphi_n)$$

⇒ nadalje, primjenio je adicijske formule i dobio:

$$f(x) = C \sin(\omega x) \cos\varphi + C \cos(\omega x) \sin\varphi$$

$$f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

⇒ cilj nam je neki „ravni" impuls prikazat pomoću „trajnih" (npr. trigonometrijskih) funkcija (tzv. **harmonici**)



⇒ pokazat ćemo da je funkcija vektor i dobijemo zaključak:

$$\sin x \perp \cos x$$

↳ slijedi da je njihov skalarni umnožak jednak nuli:

$$(\sin x | \cos x) = 0$$

⇒ trebamo i integrale kako bi se približili traženoj funkciji:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\cos(2x)\right) \Big/_{-\pi}^{\pi} = 0$$

⇒ vratimo se na zapis: $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$

↳ nepoznanice: A, B, φ

$$\left.\begin{aligned} A &= C \sin \varphi \\ B &= C \cos \varphi \end{aligned}\right\} A^2 + B^2 = C^2 \sin^2 \varphi + C^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \tan \varphi$$

↳ ako je $\frac{A}{B} = \tan \varphi$, onda imamo dva kuta φ_1 i φ_2 koji se razlikuju za $180°$

↳ kako bi znali koji kut trebamo, moramo zaključiti po pozitivnosti / negativnosti koeficijenata A i B (kada su sinus / kosinus pozitivni, a kada negativni (u kojem kvadrantu))

⇒ zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje funkcija s istim periodima čuva periodičnost, no temeljni period funkcije može čak biti i manji

⇒ periodičnost, parnost i neparnost će imati veliku ulogu kod jednostavnosti integriranja (naći najjednostavniji period)

TRIGONOMETRIJSKI FOURIEROV RED

⇒ sada ćemo se koristit Fourierovim redom na intervalu $[-\pi, \pi]$ s uzetom $\omega = 1$

⇒ ako red:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

konvergira, on definira periodičnu funkciju „f" perioda 2π i naziva se Fourierov red

↳ **konvencija:** uz kosinus (parne dijelove) pišemo koeficijent „a", a uz sinus (neparne dijelove) pišemo koeficijent „b"

početna funkcija

napišem Fourierov red

nađem koeficijente „a" i „b"

provjerimo je li aproksimacija dobra

DA

NE

NIŠTA!

⇒ zašto nam je integral bitan?

↳ pogledaj skalarni umnožak: $(\sin(7x) \mid \cos(5x)) = 0$

↳ definicija skalarnog umnoška:

$$\left((x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (y_1, y_2, \ldots, y_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

↳ ako integriramo, imamo beskonačno tih suma, pa možemo radit skalarni umnožak s funkcijama

↳ izračunajmo ovaj integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(7x)\cos(5x)\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin(7x)\cos(5x) = \\ = \dfrac{\sin(12x)+\sin(2x)}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(12x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos(12x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\left(\cos(2x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{24}\left[\cos(12\pi) - \cos(-12\pi)\right] - \frac{1}{4}\left[\cos(2\pi) - \cos(-2\pi)\right] = 0$$

⇒ za vježbu izračunaj: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos x \, dx$

⇒ RAČUNANJE KOEFICIJENATA:

↳ imamo Fourierov red:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos x + b_n \sin x$$

↳ radimo integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\frac{1}{2}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dx + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{4}a_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{4}a_0 \cdot 2\pi$$

$$= \frac{a_0}{2}$$

⇒ koeficijente „a_0", „a_n" i „b_n" računamo na način da pokrijemo sve umnoške pod integralom

⇒ u intervalu $[-\pi, \pi]$, Fourierov red izgleda ovako:

$$\frac{1}{2},\ \cos x,\ \sin x,\ \cos(2x),\ \sin(2x),\ \ldots,\ \cos(nx),\ \sin(nx),\ \ldots$$

⇒ dalje nam je zadatak odrediti Fourierov red na intervalima:
a) $[-L, L]$
b) $[a, b]$

⇒ kada dobijemo red $S(x)$, da li on konvergira i da li on konvergira funkciji $f(x)$?
↳ ako da, onda dobijemo Fourierov red
↳ sve uvjete naveo je Dirichlet

⇒ Dirichletovi uvjeti kažu:

1) „f" je neprekinuta, njeni su prekidi prve vrste (s obje strane prekida limesi su konačni)

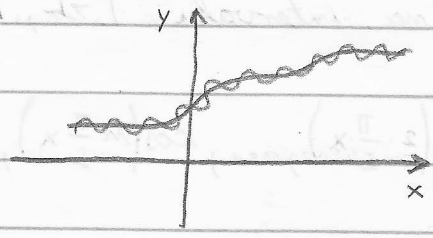
2) „f" je monotona ili ima konačan broj strogih ekstrema (konačan broj znači da je funkcija po dijelovima monotona (konačan broj na zadanom intervalu))

↳ naravno, preduvjet Dirichletovim uvjetima je da možemo izračunat koeficijente koji su nam bitni (a_0, a_n, b_n)

⇒ ako funkcija zadovoljava Dirichletove uvjete, tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:

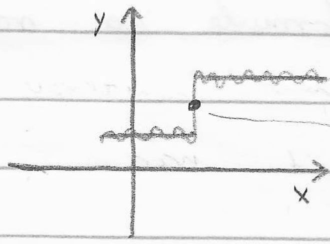
a) „f" je neprekinuta u točki x:

↳ tada vrijedi: $S(x) = f(x)$



b) „f" je prekinuta u točki x:

↳ tada vrijedi: $S(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right]$



uzima se samo ova točka jer kada bi uzeli okomitu crtu, to više nebi bila funkcija

⇒ NAPOMENA: integral će bit najviše dva puta parcijalno integrabilan ili neke jednostavne supstitucije

⇒ sada ćemo pogledat Fourierov red periodičnih funkcija

⇒ NAPOMENA: ako treba 3 puta parcijalno integrirati, možda postoji neki drugi način

⇒ FOURIEROV RED PERIODIČNE FUNKCIJE:

↳ neka je „f" periodična s periodom $T = 2L$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{L}$$

↳ napišemo Fourierov red na intervalu $[-L, L]$:

$$\underbrace{\frac{1}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \cos\left(2\frac{\pi}{L}x\right)}_{\frac{\pi}{L} \to \omega}, \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{L}x\right), \dots, \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right), \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right), \dots$$

↳ vidimo da „ω" („duljina" harmonika) ovisi o intervalu $[-L, L]$ (njegovoj širini)

↳ bitno je znati izvode i formule za računanje koeficijenata „a_0", „a_n", „b_n"

⇒ nadalje, proširit ćemo Fourierov red na najopćenitiji slučaj, na interval $[a, b]$ duljine perioda T:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

↳ bolji način na pamćenje svih Fourierovih redova:

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right] \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

ZAD: 4. c) $f(x) = 3 - |x|$

$[-5, 5], \ L = 5 \Rightarrow T = 10$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{5}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{5} + b_n \sin\frac{n\pi x}{5}$$

↳ računamo koeficijente:

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3-|x|)dx = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(3+x)dx + \int_{0}^{5}(3-x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[3x + \frac{x^2}{2}\Big|_{-5}^{0} + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{5}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[0 - \left(-15 + \frac{25}{2}\right) + 15 - \frac{25}{2}\right] = \frac{1}{5}(30-25) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3-|x|)\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(3+x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx + \int_{0}^{5}(3-x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}3\cos\frac{n\pi x}{5}dx + \underbrace{\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}x\cos\frac{n\pi x}{5}dx - \frac{1}{5}\int_{0}^{5}x\cos\frac{n\pi x}{5}dx}_{} =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{5}x\right)\Big|_{-5}^{5} + \text{„parcijalna integracija"} =$$

$$= \overbrace{0 - 0}^{\sin(k\pi)=0} + \frac{1}{5}\left[\overbrace{(0-0)}^{\sin(k\pi)=0} - \left(\frac{5}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi}{5}x\right)\Big|_{-5}^{0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\left(\frac{5}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi}{5}x\right)\Big|_{-5}^{0}\right] = \frac{10}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

↳ uvjeri se da je $b_n = 0$

⇒ NAPOMENA: Fourierov red ima parni i neparni dio:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n \cos(n\omega x)}_{\text{paran dio}} + \underbrace{b_n \sin(n\omega x)\Big]}_{\text{neparan dio}}$$

↳ ovo nam je bitno zbog jednostavnosti jer ako trebamo prikazati neparnu funkciju odmah znamo da nam je cijeli parni dio Fourierovog reda jednak nuli (vrijedi obratno za parne funkcije)

↳ to se koristi u zadacima u kojima treba funkciju prikazati na nekom intervalu (npr. $[0, a]$), pa ju proširimo na paran ili neparan način (na interval $[-a, a]$) kako bi izbjegli računanje koeficijenata uz neparan ili paran dio Fourierovog reda)

ZAD: 5. D $f(x) = x \sin x$

↳ proširujemo period na $\langle -\pi, \pi \rangle \Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{proširena neparna funkcija}} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{neparna funkcija}} dx$$

→ podintegralna funkcija je parna, pa možemo pisati:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(x)\, dx$$

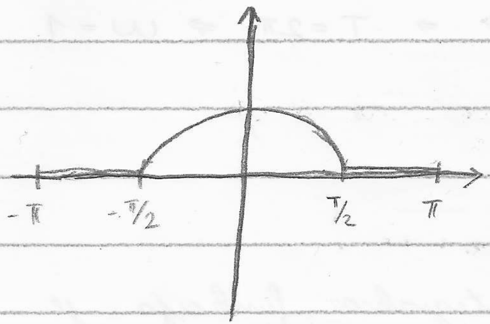
⇒ izračunajmo sada integral:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \, \sin(nx)\, dx = \left[\sin x \sin(nx) = \frac{1}{2} \left[\cos(x - nx) - \cos(x + nx) \right] \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos[(n-1)x]\, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos[(n+1)x]\, dx = \text{„izračunamo integrale parcijalnom integracijom"}$$

⇒ NAPOMENA: pokušaj izračunat Fourierov red funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

ZAD: 6.E $\quad f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases} \qquad \langle 0,\pi\rangle$



$$T=2\pi \Rightarrow \omega=1$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}0\,dx\right]$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\cos x\cos(nx)\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}0\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos(nx)\,dx$$

$a_n=$ „raspišemo preko zbroja i integriramo"

SVOJSTVA FOURIEROVOG REDA

⇒ koordinatizacija funkcije preko Fourierovog reda:

$$f(x) = (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$$

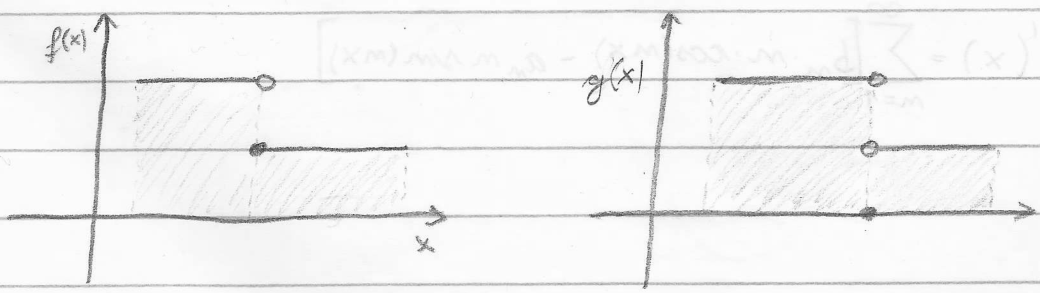
↳ drug način je:

$$f(x) = (c_0, c_1, \varphi_1, c_2, \varphi_2, \dots)$$

⇒ ovo su spektri: $a_n \rightarrow$ sinusni spektar
$b_n \rightarrow$ kosinusni spektar
$c_n \rightarrow$ amplitudni spektar
$\varphi_n \rightarrow$ fazni spektar

⇒ JEDNOZNAČNOST SPEKTRALNOG PRIKAZA:

↳ ako funkcije „f" i „g" imaju isti diskretni spektar i zadovoljavaju Dirichletove uvjete, onda se one podudaraju u svim točkama (osim možda u točkama prekida)



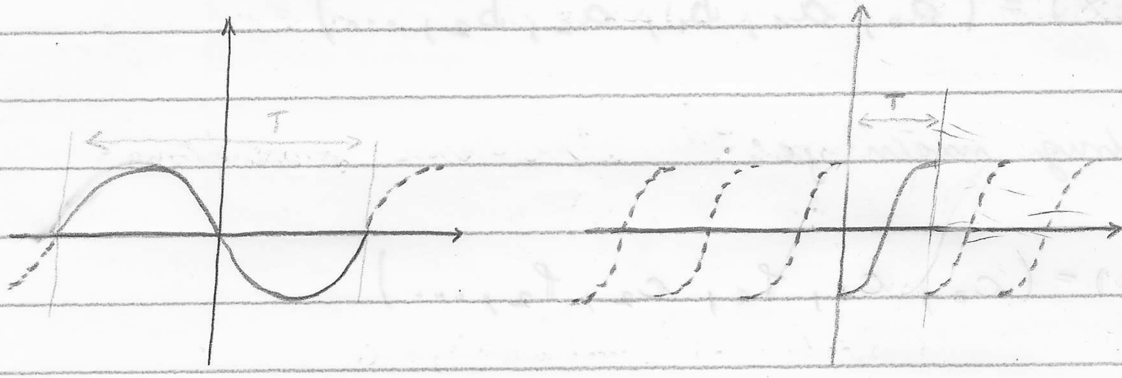
↳ funkcije su različite, ali im je Fourierov red isti to se one razlikuju u prekidima iako im je spektralni prikaz jednak

⇒ DERIVIRANJE FOURIEROVOG REDA:

↳ nije baš jednostavno kao kod Taylorovog reda

↳ deriviranjem se ne mora očuvat konvergencija

↳ bitan preduvjet je da je funkcija neprekinuta na cijelom skupu $\mathbb{R}$:



↳ neprekinuto na R

↳ nije neprekinuto na R

↳ također, derivacija nam mora zadovoljavat Dirichletove uvjete kako bi mogli reć da derivacija vrijedi

↳ ako oba uvjeta vrijede, možemo pisati:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \cdot n \cdot \cos(nx) - a_n n \sin(nx)\right]$$

PARSEVALOVA JEDNAKOST

⇒ postaje nam bitna jednakost, odnosno okomitost funkcija:

$$\int \cos(m\omega x)\sin(n\omega x)\,dx = 0$$

$$\int \cos(m\omega x)\cos(n\omega x)\,dx = 0 \quad , n \neq m$$

$$\int \sin(m\omega x)\sin(n\omega x)\,dx = 0 \quad , n \neq m$$

↳ ovo možemo predočit skalarnim produktom:

$$\sin(n\omega x) \perp \cos(m\omega x)$$

↳ slijedi:

$$\left(\sin(n\omega x) \,\middle|\, \cos(m\omega x)\right) = 0$$

↳ samo članovi koji množe sami sebe preživljavaju u razvoju

$$\left(f(x) \,\middle|\, f(x)\right) = \text{„norma funkcije"} = \int_a^b f(x)\cdot f(x)\,dx = \int_a^b [f(x)]^2\,dx =$$

zbog naglašavanja se ponekad piše $|f(x)|^2$

$$= \int_a^b |f(x)|^2\,dx = \int_a^b \left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 x) + b_n\sin(n\omega_0 x)\right)\right]^2 dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)\right]^2 dx$$

↳ vrijedi:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

⇒ primijetimo da mi zapravo računamo normu:

$$\|(x_1, x_2, x_3)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

⇒ zaključujemo:

$$\|f(x)\|^2 = \frac{T}{4}a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \quad / \cdot \frac{2}{T}$$

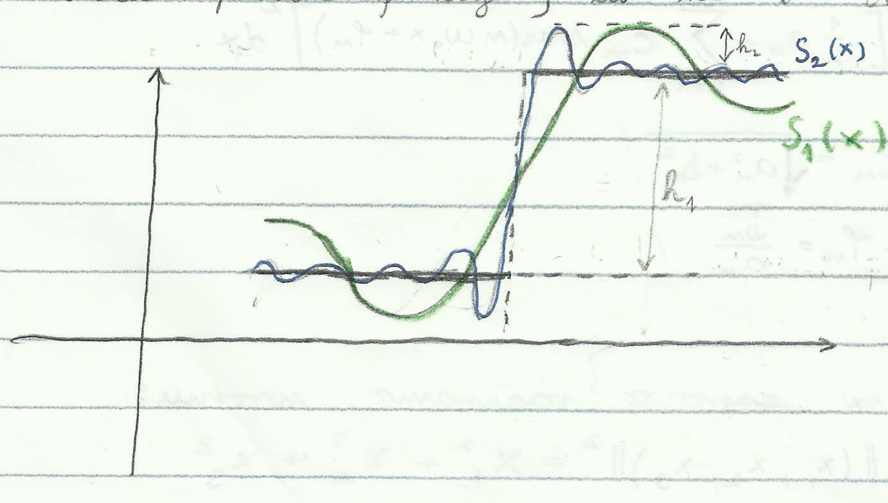
$$\frac{2}{T}\|f(x)\|^2 = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\boxed{\frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}$$

⇒ NAPOMENA: ako tražimo sumu i u Fourierovom redu dobijemo premisku potenciju nad „n", tada vrlo vjerojatno treba primijeniti Parsevalovu jednakost jer ona podiže stupanj od „n" za dva

⇒ GIBBSOV FENOMEN:

↳ povećanjem „n"-a, mijenja se samo širina skoka prekidu funkcije, ali ne i visina skoka.



$$\frac{h_2}{h_1} = 9\%$$

↓

visina skoka u odnosu na visinu impulsa

FOURIEROV INTEGRAL

⇒ Fourierov red, za razliku od Taylorovog, ima nedostatak, a to je da on aproksimira periodičnu – djeluje na ograničenom intervalu

⇒ bavimo se funkcijom definiranom Fourierovim redom oko ishodišta, na intervalu $\langle -L, L \rangle$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right] \qquad T = 2L, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$$

↳ raspišemo koeficijente a_0, a_n i b_n te ih uvrstimo u gornju formulu te dobivamo:

$$f(x) = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} f(\beta)\, d\beta + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} f(\beta) \cos[n\omega(x-\beta)]\, d\beta$$

↳ sada pustimo L u beskonačnost $(L \to \infty)$:

↳ član: $\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\beta)\, d\beta$ teži k nuli (ako je integral $< \infty$ što je uvjet)

↳ uvedimo supstituciju:

$$\lambda_n = n\omega \; , \quad \Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \omega = \frac{\pi}{L}$$

↳ sada imamo:

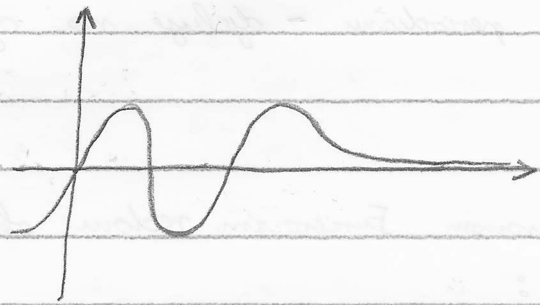
$$f(x) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda_n \int_{-L}^{L} f(\beta) \cos[\lambda_n (x-\beta)]\, d\beta$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) \cos[\lambda(x-\beta)]\, d\beta}$$

→ Fourierova integralna formula

⇒ sada možemo i različite funkcije prikazati preko Fourierovog razvoja - upravo preko integrala

↳ primjer funkcije koje možemo prikazati:



→ prije smo funkcije mogli prikazati samo na nekom intervalu

⇒ funkcija definirana (izražena) preko Fourierovog integrala poprima vrijednost:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{„}f\text{" neprekinuta u } x \\ \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] & , \text{„}f\text{" ima prekid u } x \end{cases}$$

⇒ više se koristi formula za Fourierov integral i spektar:

$$\tilde{f}(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]\, d\lambda$$

↳ funkcije $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ su spektri:

1) kosinusni spektar:

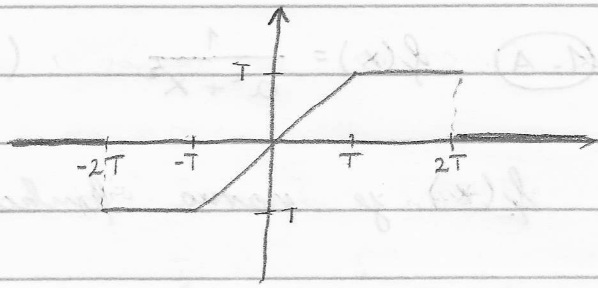
$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\cos(\lambda\beta)\, d\beta$$

2) sinusni spektar:

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\sin(\lambda\beta)\, d\beta$$

ZAD: 6

$$f(x)=\begin{cases}-T, & x\in[-2T,-T]\\ x, & x\in[-T,T]\\ T, & x\in[T,2T]\\ 0, & \text{INAČE}\end{cases}$$



$f(x) \Rightarrow$ neparna

$\hookrightarrow A(\lambda)=0$

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(\xi)\sin(\lambda\xi)\,d\xi$$

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^T \xi\sin(\lambda\xi)\,d\xi+\frac{2}{\pi}\int_T^{2T} T\sin(\lambda\xi)\,d\xi+\frac{2}{\pi}\int_{2T}^{\infty} 0\cdot\sin(\lambda\xi)\,d\xi=(*)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^T \xi\sin(\lambda\xi)\,d\xi=\left|\begin{matrix}u=\xi & dv=\sin(\lambda\xi)d\xi\\ du=d\xi & v=-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda\xi)\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\xi}{\lambda}\cos(\lambda\xi)\Big|_0^T+\frac{1}{\lambda}\int\cos(\lambda\xi)d\xi\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\left(\frac{T}{\lambda}\cos(\lambda T)\right)+\frac{1}{\lambda^2}\sin(\lambda\xi)\Big|_0^T\right]=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{T}{\lambda}\cos(\lambda T)+\frac{1}{\lambda^2}\sin(\lambda T)\right]$$

$$B(\lambda)=(*)=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{T}{\lambda}\cos(\lambda T)+\frac{1}{\lambda^2}\sin(\lambda T)-\frac{T}{\lambda}\left(\cos(2T\lambda)-\cos(\lambda T)\right)\right]$$

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\left[-\cancel{\frac{T}{\lambda}\cos(\lambda T)}+\frac{1}{\lambda^2}\sin(\lambda T)-\frac{T}{\lambda}\cos(2T\lambda)+\cancel{\frac{T}{\lambda}\cos(\lambda T)}\right]$$

$$B(\lambda)=\frac{2}{\lambda\pi}\left[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda T)-T\cos(2\lambda T)\right]$$

$\Rightarrow$ napomena: kod računanja $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ sve ostale varijable („x" i „ξ") moraju nestati u krajnjem rezultatu

ZAD: 1. A $\quad f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} \quad (a>0)$

$f(x)$ je parna funkcija $\Rightarrow B(\lambda)=0$

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{a^2+\xi^2}\cos(\lambda\xi)\,d\xi$$

↳ ovaj integral ne znamo izračunat na tradicionalni način, već trebamo iskoristiti poznati Fourierov integral:

$$e^{-px} = \frac{2p}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{p^2+\lambda^2}\,d\lambda$$

↳ u našem (gornjem) integralu vrijedi:

$$\xi \longrightarrow \lambda$$
$$a \longrightarrow p$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{a}\cdot e^{-a\lambda}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{a}e^{-a\lambda}\cos(\lambda x)\,d\lambda$$

⇒ napomena: ovakvi zadaci se mogu pojaviti, ali ćemo vjerojatno prije trebat prikazati neku funkciju preko Fourierovog integrala te ga kasnije iskoristit

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

⇒ koristi se za prijelaz iz diferencijalne ili integralne jednadžbe u odgovarajuću algebarsku jednadžbu

↳ nađemo rješenje algebarske jednadžbe te se inverznom Laplaceovom transformacijom vraćamo do rješenja početnog problema

$f \rightarrow$ početna funkcija („t"- domena)

$F \longrightarrow$ transformat („s"- domena)

⇒ LAPLACEOV TRANSFORMAT:

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\, dt}$$

↳ $f(t) \rightarrow$ original ili gornja funkcija

↳ $F(s) \rightarrow$ slika ili donja funkcija

↳ vrijedi:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$$

⇒ najbitnije svojstvo Laplaceove transformacije je LINEARNOST

↳ dokaz tog svojstva nije težak i dobro ga je znati

PR: Razvij Laplaceovu transformaciju za $f(t) = t\,e^t$!

$$\mathcal{L}(te^t) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot te^t \, dt = \int_0^\infty t e^{t-st} dt =$$

$$= \int_0^\infty t e^{t(1-s)} dt = \left| \begin{matrix} u = t & dv = e^{t(1-s)} dt \\ du = dt & v = \frac{1}{1-s} e^{t(1-s)} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{1-s} e^{t(1-s)} \cdot t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{1-s} e^{t(1-s)} dt =$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left[\frac{1}{1-s} \left(M \cdot e^{M(1-s)} - 0 \right) - \frac{1}{(1-s)^2} \left(e^{M(1-s)} - e^0 \right) \right]$$

↳ primijetimo da za $s > 1$ ovo jedino konvergira, pa to uzimamo za rezultat:

$$\mathcal{L}(tet) = 0 - 0 + \frac{1}{(1-s)^2}$$

$$\mathcal{L}(te^t) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

⇒ izvedimo transformat za: $e^{\alpha t}$

↳ dobivamo:

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{s-\alpha}$$

↳ koristeći ovo izvedimo: $\mathcal{L}(e^{i\omega t})$

↳ vidimo da ćemo pomoću ovoga dobiti

sinus i kosinus !

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = e^{0}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$$

↳ izvedimo transformat:

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{s-i\omega} \cdot \left(\frac{s+i\omega}{s+i\omega}\right)$$

$$= \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

↳ zbog linearnosti Laplaceove transformacije slijedi:

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) + i\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \mathcal{L}(e^{i\omega t})$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

↳ zaključujemo:

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

⇒ bitni izvedeni Laplaceovi transformati:

1	t^n	$e^{\alpha t}$	$\sin(\omega t)$	$ch(\omega t)$	$\cos(\omega t)$	$sh(\omega t)$
$1/s$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

ZAD: Odredi sliku sljedeće funkcije: $f(x) = ch(2t)\, sh\, t$

$$\mathcal{L}(ch(2t)\, sh\, t) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\cdot\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathcal{L}\left(e^{3t}-e^{t}+e^{-t}-e^{-3t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)$$

⇒NAPOMENA: vidimo da kod Laplaceovih transformacija vrijede jednaki „trikovi" kao kod integriranja - izraz svodimo na dovoljno jednostavan izraz na koji znamo primjeniti formule iz tablice.

ZAD: Odredi original sljedeće funkcije: $f(x) = \frac{2}{s-2} + \frac{4}{s^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-2} + \frac{4}{s^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(2 \cdot \frac{1}{s-2} + 4 \cdot \frac{1}{s^2}\right) =$$

$$= 2 \cdot e^{2t} + 4t$$

ZAD: Odredi original sljedeće funkcije: $f(x) = \frac{2s+1}{s^2-2s}$

↳ rastavimo funkciju na parcijalne razlomke:

$$\frac{2s+1}{s^2-2s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2}$$

$$2s+1 = A(s-2) + Bs$$

$s=0$ | $s=2$

$1 = -2A$ | $5 = 2B$

$A = -\frac{1}{2}$ | $B = \frac{5}{2}$

$$\frac{2s+1}{s^2-2s} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{5}{2} e^{2t} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{2t}$$

⇒ do sada znamo samo računat Laplaceovu transformaciju po formuli:

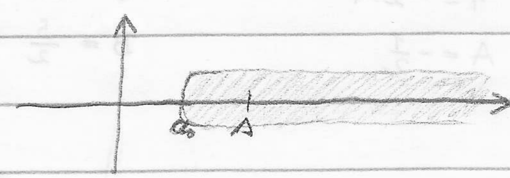
$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

↳ uveli smo jednostavnu oznaku: $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

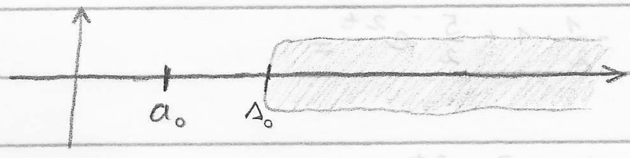
↳ iz ove formule smo izveli sve ostale koje su u tablici Laplaceovih transformacija

↳ nama probleme radaje ovaj nepravi integral u toj baznoj formuli, ali nam stvar olakšava funkcija e^{-st} jer znamo da je ona prilično jednostavna za izračunat pod nepravim integralom

⇒ TEOREM 2: Laplaceov integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ konvergira u području $s > a_0$, gdje je a_0 eksponent rasta funkcije „f".



Sada uzmimo neki $s_0 > a_0$. Tada vrijedi da u području $s > s_0$ naš integral konvergira.



ZAD: Provjeri je li ova funkcija original i odredi (ako se može) eksponent rasta α_0!

$$f(t) = 3 \cdot 2^{2t}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} \cdot 3 \cdot 2^{2t} = 3 \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} \cdot 2^{2t} = 3 \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{\ln 2^{2t}} =$$

$$= 3 \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} e^{2t \ln 2} =$$

$$= 3 \lim_{t\to\infty} e^{-t(\alpha - 2\ln 2)} = 0$$

vrijedi za:

$$\alpha - 2\ln 2 > 0$$

$$\alpha > \ln 4 \Rightarrow \alpha_0 = \ln 4$$

SVOJSTVA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

⇒ bilo bi dobro znat izvode jer na taj način znamo kada koje svojstvo možemo / moramo primjenit

1) MNOŽENJE VARIJABLE KONSTANTOM

↳ dokaz je jednostavan za prvu tvrdnju, a za drugu:

$$F(bs) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right)$$, moramo koristit prvu:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right)\right) = \frac{1}{b} \mathcal{L}\left(f\left(\frac{1}{b} \cdot t\right)\right) = \frac{1}{b} \cdot b \cdot F\left(\frac{s}{\frac{1}{b}}\right) = F(bs)$$

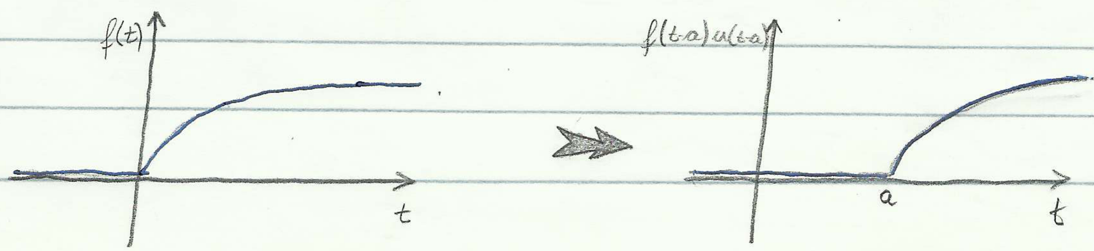
2) TEOREM O PRIGUŠENJU

↳ dokaz je jednostavan

$$e^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s+a)$$

3) TEOREM O POMAKU

↳ pomak je slučaj kada nam vrijednost funkcije (koja je nula) pomakne u desno - original se pomakne udesno (miče se i step funkcija)

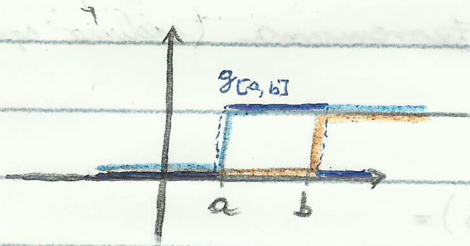


↳ utvrdili smo da se radi o pomaku orginala, te pomaku orginala udesno odgovara prigušenju u donjem području:

$$f(t-a)\,u(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-as}\cdot F(s)$$

⇒ GATE FUNKCIJA:

↳ koristi se za izoliranje signala od jedne do druge točke i može se zapisat kao razlika dviju step funkcija:

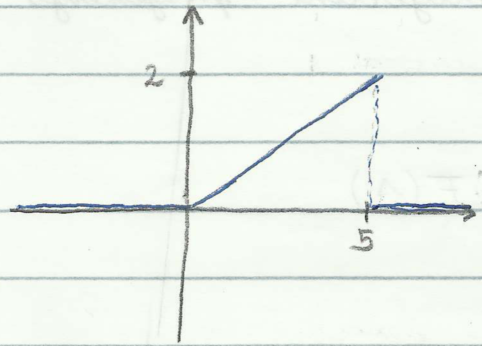


$$g_{[a,b]} = u(t-a) - u(t-b)$$

↳ stoga, transformat gate funkcije izgleda:

$$g_{[a,b]}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{e^{-sa}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s}$$

PR: Preslikaj funkciju zadanu slikom!



$$f(t) = k(t) \cdot g_{[2,5]}(t) =$$

$$= \frac{2}{5} t \cdot g_{[2,5]}(t) =$$

$$= \frac{2}{5} t \left[u(t) - u(t-5) \right] =$$

$$= \frac{2}{5} t u(t) - \frac{2}{5} t u(t-5)$$

↳ sada se moramo koristiti teoremima (vidimo sprezanje i pomak):

$$f(t) = \frac{2}{5} t u(t) - \frac{2}{5}(t-5+5) u(t-5) =$$

$$= \frac{2}{5} t u(t) - \frac{2}{5}(t-5) u(t-5) - \frac{2}{5} \cdot 5 \cdot u(t-5) =$$

$$= \frac{2}{5} t u(t) - \frac{2}{5}(t-5) u(t-5) - 2 u(t-5)$$

prijelaz domena

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{e^{-5s}}{s^2} - 2 \cdot \frac{e^{-5s}}{s}$$

4) DERIVIRANJE ORIGINALA

↳ ako je $f(t)$ original i on je n-puta diferencijabilna funkcija, tada vrijedi:

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0)$$

↳ izvedimo induktivno za više derivacije:

$$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ ?$$

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$$

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0)$$

$$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$f'''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s\left[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right] - f''(0) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

5) DERIVIRANJE SLIKE

$$F'(s) = \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right)' = \frac{d \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}{ds}$$

↳ uniformna konvergencija omogućava da integral i derivacija komutiraju:

$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{d e^{-st} f(t)\,dt}{ds} = \int_0^\infty (-t)\, e^{-st} f(t)\,dt$$

jezgra transformacije

funkcija po „t"

$$(-t) f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F'(s)$$

$$F'(s) = \mathcal{L}\left[(-t) f(t)\right]$$

↳ induktivno zaključujemo: $F'(s) \bullet\!\!-\!\!\circ (-t) f(t)$

$$F''(s) \bullet\!\!-\!\!\circ (-t)^2 f(t)$$

$$\vdots$$

$$\boxed{F^{(n)}(s) \bullet\!\!-\!\!\circ (-t)^n f(t)}$$

↳ nadalje: $(-t)^n = (-1)^n t^n$

$$(-1)^n t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F^{(n)}(s)$$

↳ zbog linearnost (homogenost) vrijedi:

$$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (-1)^n F^{(n)}(s)$$

ZAD: Odredi sliku funkcije $f(t) = t\sin t$!

$$\mathcal{L}(t^2 \sin t) = ?$$

↳ vidimo da je ovo prekomplicirano za računat iz definicije pa se koristimo derivacijom:

$$\mathcal{L}(t^2 \sin t) = (-1)^2 F''(s) = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)'' = \left(-\frac{1}{(s^2+1)^2} \cdot 2s\right)' =$$

$$= -\frac{2(s^2+1)^2 - 2s \cdot 2(s^2+1) \cdot 2s}{(s^2+1)^4}$$

ZAD: Odredi sliku funkcije $f(t) = t\,sh''t$!

$$ch''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 \cdot \frac{s}{s^2-1} - s \cdot ch(0) - ch'(0)$$

$$ch''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s^3}{s^3-1} - s$$

$$t\,ch''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\left(\frac{s^3}{s^2-1} - s\right)' = 1 - \frac{3s^2(s^2-1) - s^3 \cdot 2s}{(s^2-1)^2}$$

6) INTEGRIRANJE SLIKE

↳ ako je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, onda vrijedi:

$$\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_s^{\infty} F(s)\,ds$$

↳ izvod: $\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \phi(s)$

→ ovime smo rekli da slika postoji

↳ deriviramo sliku:

$$t \cdot \frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet -\phi'(s)$$

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -\phi'(s)$$

↳ vidimo da slijedi: $\phi'(s) = -F(s)$

$$\phi(s) = -\int_{s_0}^{s} F(s)\,ds + C = \int_{s}^{s_0} F(s)\,ds + C$$

↳ stavimo $s = s_0$ kako bi odredili C: $\phi(s_0) = C$

↳ pustimo $s_0 \to \infty$:

$$\phi(s) = \lim_{s_0 \to \infty} \int_{s}^{s_0} F(s)\,ds + \phi(s_0)$$

∞

$$\phi(s) = \int_{s}^{\infty} F(s)\,ds$$

ZAD: Odredi sliku funkcije $f(t) = \frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t}$!

↳ vrijedi linearnost:

$$e^{-3t} - e^{-5t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5}$$

↳ primjenimo teorem o integriranju slike:

$$\frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5} \right) ds =$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left[\ln(s+3) - \ln(s+5) \right] \Big|_s^M = \left| \infty - \infty \right| =$$

$$= \lim_{M \to \infty} \ln \frac{s+3}{s+5} \Big|_s^M = \lim_{M \to \infty} \left(\ln \frac{s+3}{s+5} - \ln \frac{s+3}{s+5} \right) =$$

$$= \ln 1 - \ln \frac{s+3}{s+5} = \ln \frac{s+5}{s+3}$$

7) INTEGRIRANJE ORIGINALA

↳ ako je $f(t)$ original, tada je i

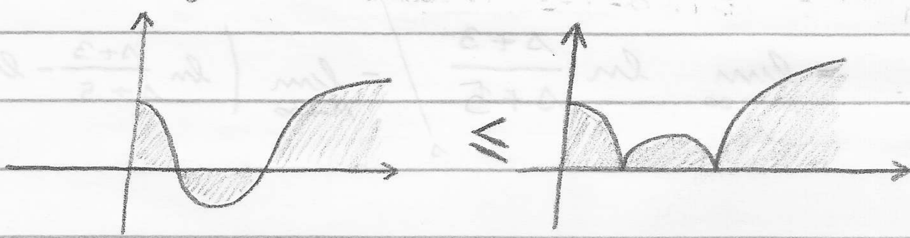
$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau, \quad \text{također}$$

original i vrijedi:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}$$

↳ u dokazu treba primjeniti činjenicu:

$$\left| \int_0^t f(t)\, dt \right| \leq \int_0^t |f(t)|\, dt$$



↳ dokaz:

$$\varphi(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \phi(s)$$

$$\varphi'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s\,\phi(s) - \varphi(0)$$

↳ koliko je $\varphi(0)$?

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(\tau)\, d\tau = 0$$

↳ primjenimo $\varphi(0) = 0$:

$$\varphi'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s\,\Phi(s)$$

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s\,\Phi(s) = F(s)$$

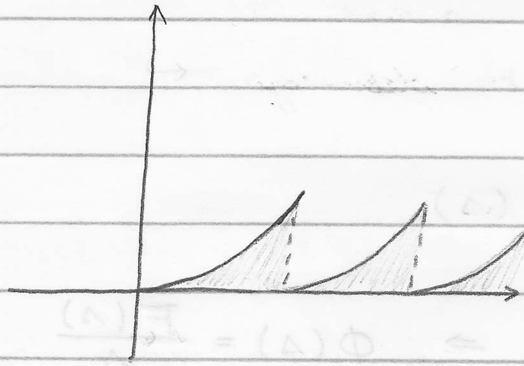
$$s\,\Phi(s) = F(s) \Rightarrow \Phi(s) = \frac{F(s)}{s}$$

↳ vratimo se na početak i uvrstimo $\Phi(s)$:

$$\varphi(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(s)}{s}$$

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(s)}{s}$$

8) PRESLIKAVANJE PERIODIČNIH FUNKCIJA



⇒ ovo rastavimo na sumu beskonačno mnogo određenih integrala

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty} I_n$$

↳ jednostavno je pokazati:

$$I_n=\underbrace{\left(e^{-sT}\right)}_{q}{}^{n}\, I_0$$

q → u sumi će ovo izraziti geometrijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\frac{I_0}{1-e^{-sT}}$$

⇒ napomena: kod rješavanja zadataka s hiperbolnim funkcijama, često je dobro tu funkciju jednostavno raspisati po definiciji

PR: Odredi sliku funkcije $sh^3(2t)$!

$$sh^3(2t) = \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{6t} - 3e^{4t}e^{-2t} + 3e^{2t}e^{-4t} - e^{-6t}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{6t} - 3e^{2t} + 3e^{-2t} - e^{-6t}\right)$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{s-6} - \frac{3}{s-2} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+6}\right)$$

ZAD: Izračunaj integral $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$!

↳ proširimo početni integral:

$$\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{t}\cdot \frac{\sin^2 t}{t}\, dt = \text{„vidi primjer 20,21"} = F(1)$$

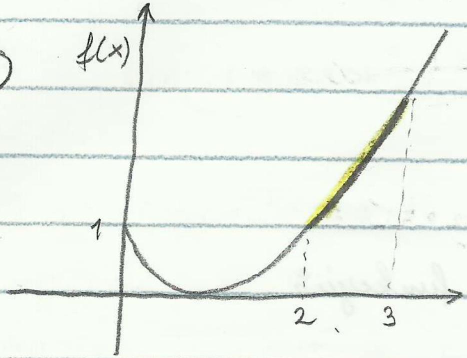
↳ koristimo sljedeće:

$$\frac{e^{t}\sin^2 t}{t^2} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F(s)$$

1) $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$

2) $\frac{f(t)}{t} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \int_0^\infty F(\sigma)\, d\sigma$

ZAD: 6. A



$$f(t) = (t-1)^2 \cdot g[2,3]$$

$$f(t) = (t-1)^2 \left[u(t-2) - u(t-3)\right]$$

$$f(t) = (t-1)^2 u(t-2) - (t-1)^2 u(t-3)$$

$$f(t) = \left[(t-2)+1\right]^2 u(t-2) - \left[(t-3)+2\right]^2 u(t-3)$$

$$f(t) = (t-2)^2 u(t-2) + 2(t-2)u(t-2) + u(t-2) -$$

$$- (t-3)^2 u(t-3) - 4(t-3)u(t-3) - 4u(t-3)$$

$$e^{-2s}\left[\frac{2!}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right] - e^{-3s}\left[\frac{2!}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right]$$

ZAD: 7.D $\int_0^t \frac{sh^2 u}{u} du$

↳ uzmemo podintegralnu funkciju:

$$\frac{sh^2 u}{u} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty \mathcal{L}(sh^2 u)\, d\sigma$$

↳ stoga, prvi korak je: $sh^2 u \circ\!\!-\!\!\bullet\ ?$

$$\frac{1}{2}\left(ch(2u) - 1\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2-4} - \frac{1}{s}\right]$$

↳ sada se vratimo na integral:

$$\frac{1}{2}\int_s^\infty \left[\frac{\sigma}{\sigma^2-4} - \frac{1}{\sigma}\right] d\sigma = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(\sigma^2-4) - \ln\sigma\right]\Big|_s^\infty =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(\sigma^2-4) - \ln\sigma^2\right]\Big|_s^\infty = \frac{1}{4}\ln\frac{\sigma^2-4}{\sigma^2}\Big|_s^\infty$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln 1 - \ln\frac{s^2-4}{s^2}\right] = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2-4}$$

$$\frac{sh^2 u}{u} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2-4}$$

↳ sada se vratimo pod integral:

$$\int_0^t \frac{sh^2 u}{u} du \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{4s}\ln\frac{s^2}{s^2-4}$$

INVERZNA TRANSFORMACIJA

⇒ sada ćemo naučiti kako iz poznate slike $F(s)$ dobiti original $f(t)$

↳ to je inverzna transformacija:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

⇒ HEAVISIDEOV RAZVOJ:

↳ ako su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ jednostruke nultočke polinoma Q, tada original funkcije $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ ima oblik:

$$f(t) = \left[A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t} + \ldots + A_r \cdot e^{a_r t}\right] u(t)$$

↳ koeficijenti A_k se računaju:

$$A_k = \lim_{s \to a_k} \frac{P(s)(s-a_k)}{Q(s)} = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

PR: Imamo:

$$\frac{s^2-s+2}{s^3-s^2-6s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-3} + \frac{A_3}{s+2} \quad / \cdot (s-3)$$

$$\frac{s^2-s+2}{\frac{s^3-s^2-6s}{s-3}} = \frac{A_1(s-3)}{s} + A_2 + \frac{A_3(s-3)}{s+2} \quad / \lim_{s\to 3}$$

$$\frac{3^2-3+2}{\lim_{s\to 3}\frac{s^3-s^2-6s}{s-3}} = 0 + A_2 + 0 \longrightarrow A_2 = \frac{8}{15}$$

$$Q'(3) = (3s^2-2s-6)\Big|_{s=3} = 27-12 = 15$$

ZAD: 2. F $\quad F(s) = \dfrac{3s+2}{(s^2-4s+6)^2}$

$$\frac{3s+2}{(s^2-4s+6)^2} = \frac{3(s-2)+8}{((s-2)^2+2)^2} = \frac{3(s-2)}{[(s-2)^2+2]^2} + 8 \cdot \frac{1}{[(s-2)^2+2]^2}$$

↳ vidimo što treba raditi:

$$e^{2t} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{(s^2+2)^2} + \frac{8}{(s^2+2)^2}\right)$$

↳ koristimo linearnost, pa radimo razlomak po razlomak:

$$\frac{s}{(s^2+2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{(s^2+2)^2} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{2\sigma}{(\sigma^2+2)^2} d\sigma =$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2+2} \Big|_s^\infty = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{s^2+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+2}$$

ovo sada treba vratiti u realnu domenu ($f(t)$)

↳ ovo je mukotrpno te je razlog za otkrivanje boljeg postupka - konvolucija

KONVOLUCIJA

⇒ neka su f_1 i f_2 original

⇒ funkcija $f_1 * f_2$ definirana s:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau,$$

naziva se **konvolucija**.

⇒ vidimo da je konvolucija dva originala original

⇒ konvolucija nam je bitna jer mi ne znamo izračunat slijedeće:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+ps+q)^n}\right),$$ ako nazivnik ne možemo faktorizirat

⇒ zbog toga možemo reć primjenom konvolucije:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\cdot F_2(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(F_2(s)\right)$$

⇒ NAPOMENA: s obzirom da se podintegralna funkcija ponišava u konvoluciji, vrijedi:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$$

ZAD: 1.E $\cos t * \cos t = \int_0^t \cos\tau \cos(t-\tau)\, d\tau =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos t + \cos(2\tau - t)\right] d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \cos t\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau - t)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} t\cos t + \frac{1}{4}\sin(2\tau - t)\Big|_0^t = \frac{1}{2} t\cos t + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin(-t) =$$

$$= \frac{1}{2} t\cos t + \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\left(t\cos t + \sin t\right)$$

ZAD: 2.B Wyznacz oryginał funkcji $\frac{1}{s(s^2-4s+5)}$!

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2-4s+5)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2-4s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4s+5}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right) = \sin(t)\cdot e^{2t} u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2-4s+5)}\right) = \int_0^t e^{2(t-\tau)}\sin(t-\tau)\, d\tau = e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}\sin(t-\tau)\, d\tau$$

↳ dwa razy parcjalna integracja.

RJEŠAVANJE DIFERENCIJALNIH I INTEGRALNIH JEDNADŽBI

⇒ primjet da do sada još nismo rješavali integralne jednadžbe, te ćemo moći rješavat sustave diferencijalnih jednadžbi

↳ diferencijalne jednadžbe ćemo moći rješavat mnogo više u općenitosti

Pr: Riješi Cauchyjevu zadaću: $x''(t) + 4x(t) = e^t$

$x(0) = 2 \; ; \; x'(0) = 1$

↳ prijelaz u algebarsku jednadžbu:

$$s^2 X(s) - 2s - 1 + 4X(s) = \frac{1}{s-1}$$

↳ izrazimo $X(s)$:

$$X(s) = \frac{2s+1}{s^2+4} + \frac{1}{(s^2+4)(s-1)}$$

↳ ovo možemo riješit ili konvolucijom ili rastavom na parcijalne razlomke - to će najčešće bit slučaj (možda je bolje prvo uvijek probat konvoluciju jer je brza za napisat, pa ako je integral pretežak ići na parcijalne razlomke)

SUSTAV DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI PRVOG REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

⇒ koristi se matrični zapis

↳ npr, za 3 dimenzije:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \varphi$$

$$\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} = \Phi(s) + C$$

⇒ ovo je teoretska pozadina, a stvarni račun će biti znatno drugačiji

ZAD: Riješimo sustav: $Y' = -4Y + 4Z$

$$Z' = -2Y - 6Z$$

↳ uradimo LaPlaceovu transformaciju:

$$sY(s) - 3 = -4Y(s) - 4Z(s)$$

$$sZ(s) - 15 = -2Y(s) - 6Z(s)$$

$$(s+4)\,Y(s) + 4Z(s) = 3$$

$$(s+6)\,Z(s) + 2Y(s) = 15 \quad \Rightarrow Y(s) = \frac{15 - (s+6)Z(s)}{2}$$

$$(s+4) \cdot \frac{15 - (s+6) \cdot Z(s)}{2} + 4Z(s) = 3$$

$$15(s+4) - (s+4)(s+6)\,Z(s) + 8Z(s) = 6$$

$$Z(s) = \frac{6 - 15(s+4)}{-(s+4)(s+6) + 8}$$

→ negdje je greška u predznaku

↳ malo sredimo i dobivamo: $Z(s) = \dfrac{15s + 54}{(s+2)(s+8)}$

KOMBINATORIKA

⇒ prebrojavanje konačnih skupova:

↳ postoji teorem o uzastopnom prebrojavanju:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

↳ kodiranje brojeva preko djelitelja (zapis preko prostih faktora):

$$15000 = 3 \cdot 5 \cdot 1000$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 125$$

$$= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$$

$$N(D) = (3+1)(1+1)(4+1) = 40$$

VARIJACIJE, PERMUTACIJE I KOMBINACIJE BEZ PONAVLJANJA

PR: Lotto 7/39 !

$39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33$

↳ ovo je broj varijacija jer je bitan redoslijed zaokruživanja brojeva

$$\frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

↳ ovo je broj kombinacija jer nije bitan redoslijed zaokruživanja brojeva

PR: 18 30 učenika → 30 mjesta

↳ dobar način razmišljanja je staviti jednog čovjeka na jedno mjesto i time fiksiramo to mjesto (tog možemo smjestiti na 30 mjesta)

↳ sljedećeg možemo smjestiti na 29 mjesta

↳ idućeg opet na 28 mjesta

$$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30!$$

① PERMUTACIJE „n" ELEMENATA: broj uređenih „n"-torki

$$P(n) = n!$$

② VARIJACIJE „n" ELEMENATA:

↳ broj varijacija reda „k" $(k \leq n)$ skupa od „n" elemenata, tj. broj poredanih „k-torki" različitih elemenata iz „n"-članog skupa:

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

③ KOMBINACIJE „n" ELEMENATA:

↳ broj „k"-članih podskupova „n"-članog skupa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

PR: 23 16 umjetnika

$$\underbrace{9 \longrightarrow 2 \text{ rada} \quad ; \quad 7 \longrightarrow 1 \text{ rad}}_{\text{ukupno } 25 \text{ radova}}$$

↳ primjet da je slučaj pod „b)" lakši jer nemamo ograničenja na nagrade

↳ načinimo različje:

- skup A → umjetnici koji su predali 2 rada
- skup B → umjetnici koji su predali 1 rad

a) ako glavnu nagradu dobije umjetnik iz A:

↳ izabiremo ga na $\binom{9}{1} \cdot 2$ načina jer je on predao 2 rada

↳ sada, tog umjetnika isključujemo iz dodjele utješnih nagrada:

- moramo sagledati slučajeve dodjele utješnih nagrada po skupovima A i B:

$$\begin{array}{cc|l} A & B & \\ 0 & 3 & \binom{7}{3} \\ 1 & 2 & \binom{7}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot 2 \\ 2 & 1 & \binom{8}{2} \cdot 2^2 \binom{7}{1} \\ 3 & 0 & \binom{8}{3} \cdot 2^3 \end{array} \Bigg\} \text{ zbrojimo}$$

↳ na analogan način moramo sagledati slučaj da glavnu nagradu dobije umjetnik iz skupa B te te slučajeve zbrojimo

b) ovo je lagano jer nas ne brine čija je čija slika!

PERMUTACIJE, VARIJACIJE I KOMBINACIJE S PONAVLJANJEM

① PERMUTACIJE „n" ELEMENATA:

PR: Pogledajmo riječ MATEMATIKA, ona se sastoji od sljedećeg:

$$\left.\begin{matrix} 3 \times A \\ 2 \times M \\ 2 \times T \\ 1 \times E \\ 1 \times I \\ 1 \times K \end{matrix}\right\} \frac{10!}{3!\,2!\,2!}$$

↳ koliko različitih riječi možemo sastaviti od ovih slova?

↳ pogledajmo to na riječ STOL jer ima različita slova: STOL

$4!$ — permutacije bez ponavljanja (svako slovo jednom)

4^4 — varijacije s ponavljanjem (svako slovo proizvoljno puta)

⇒ broj permutacija „n"-tog reda „k"-članog skupa $\{a_1, \dots, a_k\}$, u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta (vrijedi sljedeće: $i = 1, 2, \dots, k$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k \,),$$

jednak je:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

(PR: 28) Koliko permutacija riječi „matematika" ima samoglasnike abecednim redom?

↳ imamo 5 samoglasnika, pa odaberemo mjesta gdje su samoglasnici:

$$\binom{10}{5}$$

↳ samoglasnici su već poredani, pa sada treba suglasnike smjestiti na ostala mjesta:

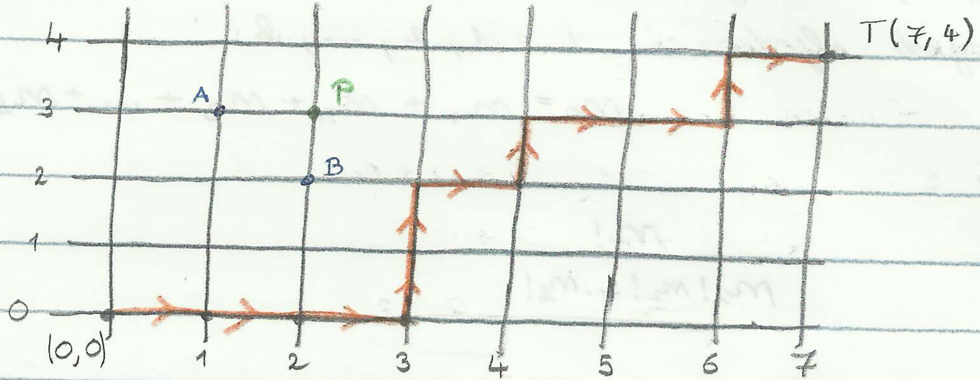
$$\frac{5!}{2!\,2!}$$

↳ ukupan rezultat je stoga:

$$\binom{10}{5} \cdot \frac{5!}{2!\,2!}$$

PR: 29 ⇒ uzmimo neke „m" i „n":

$$m = 7 \;, \quad n = 4$$



↳ u našem primjeru stoga imamo: 7 puta desno (D)
4 puta gore (G)

↳ zamislimo da imamo riječ od 11 slova koju trebamo popunit sa slovima D i G:

$$\frac{11!}{7! \cdot 4!}$$

↳ NAPOMENA: možemo i razmišljat rekurzivno gradeć Pascalov trokut - korak trokuta je činjenica da u točku „P" možemo doć na broj načina koji je jednak zbroju načina na koji možemo doć u točku A i načina na koji možemo doć u točku B

→ pogledajmo sljedeći problem:

↳ imamo potenciju trinoma: $(x_1 + x_2 + x_3)^2$

↳ koliko imamo kombinacija monoma?

– uvedimo oznake:

$$x_1^5 \longrightarrow 5+0+0$$

$$x_2^5 \longrightarrow 0+5+0$$

$$x_3^5 \longrightarrow 0+0+5$$

– ostale kombinacije:

4+1+0	3+2+0	3+1+1	2+2+1
1+4+0	2+3+0	1+3+1	2+1+2
4+0+1	2+0+3	1+1+3	1+2+2
1+0+4	3+0+2		
0+4+1	0+3+2		
0+1+4	0+2+3		

↳ koliko sada ima članova $1+3+1$, tj. koji je koeficijent uz njega?

– pokazuje se da je taj koeficijent:

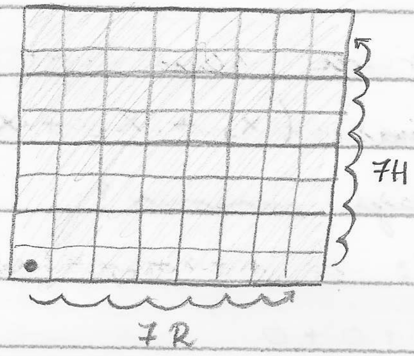
$$\frac{5!}{1!\,3!\,1!} \cdot \left(x_1^1 x_2^3 x_3^1\right)$$

↳ u općenitosti, za $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_k^{\alpha_k}$, MULTINOMNI KOEFICIJENT definira se ovako:

$$\boxed{\binom{n}{\alpha} = \frac{n}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_k!}}$$

↳ ovo se naziva multinomni teorem

PR : 33



8×8

$\Rightarrow$ prebrojimo koliko skokova treba načiniti, a ne koliko ima polja (razlika u odnosu na PR : 29)

a) imamo riječ od 14 slova (14 skokova) i to treba permutirat s ponavljanjem (ispremješati slova na različite načine):

$$\frac{14!}{7!\,7!}$$

b) sada imamo i slovo D, te nam ono krati ukupnu duljinu riječi, te neka nam broj slova D u našem rješenju bude označen s „k":

$$|D| = k = 0, 1, 2, \ldots, 7$$

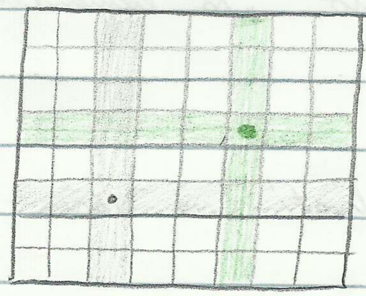
Pr: 34 ⇒ nije dobro razmišljat da idemo uzet neki donji rub pa onda pokušavat prebrojit slučajeve te na kraju to sumirat

↳ ovaj model je prekompleksan

⇒ od devet donjih linija i devet gornjih linija te devet vertikalnih linija za lijevi i desni rub trebamo odabrat dvije, zato ima ovoliko pravokutnika:

$$\binom{9}{2}\binom{9}{2}$$

Pr: 35



8×8

⇒ ovaj zadatak možemo modelirat po svim poljima ili modelirat samo po stupcima jer znamo da dva topa ne mogu bit u istom stupcu:

↳ rješenje je $8!$

⇒ rješenje po poljima:

→ prvi top: 64

→ drugi top: $64-16+1=64-15=49$

→ treći top: $49-16+3=36$

⋮

↳ ukupno: $\frac{64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}{8!} = 8!$

KOMBINACIJE S PONAVLJANJEM

⇒ modeliramo na način da iste elemente grupiramo u grup s poznatim brojem elemenata:

↳ PR: $a_1\ a_2\ a_4\ a_1\ a_4\ a_4$

↳ grupiramo:

$a_1 a_1 \mid a_2 \mid \mid a_4 a_4 a_4$

$* * \mid * \mid \mid * * *$

↳ primijet da ako imamo „n" elemenata da imamo „n-1" pregrada

⇒ zamislimo registar koj treba „kodrati" na način da zacrnimo polja:

a_1	a_1	▒	a_2	a_2	▒	a_3	▒	a_4

$n \longrightarrow$ broj elemenata

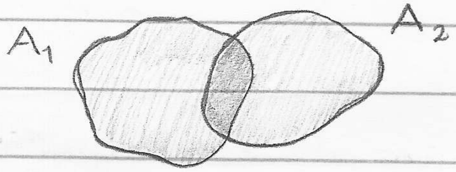
$k \rightarrow$ broj zacrnjenja (pregrada)

↳ kombinacija s ponavljanjem: $\binom{n+k-1}{n-1}$

FORMULA UKLJUČIVANJA I ISKLJUČIVANJA

⇒ ova formula nam pomaže i formalizira „suprotno" razmišljanje – od svih ukupnih rješenja oduzimamo mogućnosti koje nam ne odgovaraju

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



↳ sa tri ili više skupova je znatno kompliciranije te sve te slučajeve pokriva SYLVESTEROVA FORMULA – formula uključivanja i isključivanja:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + $$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_m|$$

↳ ovo je formula za uniju skupova – postoji i formula za presjek skupova koja se može dobiti i primjenom De Morganovog zakona

⇒ SURJEKTIVNA FUNKCIJA:

↳ ovo najlakše zamišljamo na način da imamo nekih „n" kutija i da ih popunjavamo na način da ni jedna kutija ne ostane prazna

FUNKCIJE IZVODNICE

⇒ bitne su nam formule:

a) $1 - q^n = (1-q)(1+\dots+q^{n-1})$

b) $1 - q^{n+1} = (1-q)(1+\dots+q^n)$

⇒ FUNKCIJA IZVODNICA:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

↳ ovo je funkcija izvodnica slijeda $(c_n)_{n\geq 0}$

↳ funkcija izvodnica je ustvari sažet zapis slijeda $(c_n)_{n\geq 0}$

↳ ako znamo $g(x)$, c_n se određuje prema Maclaurinovoj formuli $c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$

⇒ funkcije izvodnice rabe se za:

a) prebrojavanje podskupova i multiskupova ($g(x)$)

b) prebrojavanje konačnih slijedova (ovdje se rabi eksponencijalna funkcija izvodnica)

⇒ funkcije izvodnice su **linearne** te derivabilne i integrabilne:

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1} x^n$$

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_{n-1} x^n$$

PR : 55

$\Rightarrow$ imamo izraz: $(1+x+x^2+\dots)$

$$g(x) = (1+x+x^2+\dots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n} = (1+(-x))^{-n}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-1)^k x^k$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$\frac{(-n)(-n-1)\cdot\ldots\cdot(-n-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k}$$

PR: 56 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$

↳ tražimo koeficijent uz x^{20} funkcije izvodnice:

$$\left(x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x^{-1} + \dots\right)^2 \left(x^{-5} + x^{-4} + \dots + x^5\right)\left(1 + x + x^2 + \dots\right)$$

↳ želimo si izvući nešto što će nam dati da primjenimo geometrijski red:

$$= \left[x^{-3}\left(1 + x + x^2 + \dots\right)\right]^2 \cdot x^{-5}\left(1 + x + \dots + x^{10}\right)\left(1 + x + x^2 + \dots\right) =$$

$$= x^{-6} \cdot x^{-5}\left(1 + x + x^2 + \dots\right)^3\left(1 + x + \dots + x^{10}\right) =$$

$$= x^{-11}\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 \cdot \frac{1 - x^{11}}{1 - x} = x^{-11}\left(1 - x^{11}\right)\left(1 - x\right)^{-4}$$

PRIMJENIMO FUNKCIJU IZVODNICU

$\left(x^{31}\right)$ → jer tražimo u rezultatu x^{20}

$$\left(1 - x^{11}\right)\left(1 - \binom{-4}{1}x + \binom{-4}{2}x^2 - \dots + \binom{-4}{20}x^{20} + \dots - \binom{-4}{31}x^{31} + \dots\right)$$

↳ jedno rješenje je kada se množe x^{11} i x^{20}, a drugo kada se množi 1 sa x^{31}:

$$x^{31}\left[-\binom{-4}{31} - \binom{-4}{20}\right]$$

↳ u krajnjem rezultatu, koeficijent uz x^{20} je upravo $-\binom{-4}{31} - \binom{-4}{20}$

DIRICHLETOVO PRAVILO

⇒ neka je „n" predmeta smješteno u „m" kutija

↳ ako je $n > m$, onda postoji kutija s barem 2 predmeta

⇒ ovo pravilo primjenjuje se kada vidimo da nam dosadašnji alati iz kombinatorike nisu dovoljni

PR: 58 ⇒ imamo dva broja n_1, n_2

$99 \mid n_1 - n_2$

↳ $n_1 - n_2$ je djeljiv s 99 ako oba pri djeljenju sa 99 daju isti ostatak

↳ možemo pisati: n_1 je kongruentno n_2 po modulu 99:

$$n_1 \equiv n_2 \ (99)$$

↳ imamo 99 različitih ostataka:

$0, 1, 2, \ldots, 98$

↳ stoga, u 100 različitih brojeva sigurno mora postojati par koji ima isti ostatak pri djeljenju sa 99

⇒ POOPĆENO DIRICHLETOVO PRAVILO:

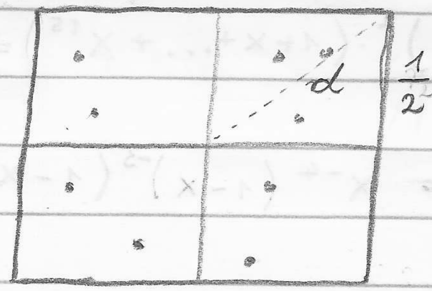
↳ ako imamo $n = 2m + 1$ predmeta smještenih u „m" kutija, onda će u nekoj kutiji biti barem 3 predmeta

↳ ovo je Dirichletovo načelo za 2 predmeta u svakoj kutiji

↳ U OPĆENITOSTI:

⇒ ako je „n" predmeta smješteno u „m" kutija, onda postoji kutija koja sadrži barem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ predmeta

PR: 64



⇒ $9 : 4 > 2$, pa trebamo sigurno 4 kućice da bi barem u jednoj bile 3 točkice

$$d = 2r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ → znači, tri točke su sigurno sadržane u krugu radijusa $\frac{\sqrt{2}}{4}$, a vrijedi da je $\frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{2}{5}$, pa su sigurno barem tri sadržane u krugu radijusa $\frac{2}{5}$

ZAD. 5 $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 28$

$x_1 \geq -3 \quad ; -5 \leq x_2 \leq 10 \; ; \quad x_3 \geq 4$

↳ za svaku varijablu pišemo funkciju izvodnicu

- $x_1 \Rightarrow (x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x + x^2 + \dots)$
- $x_2 \Rightarrow (x^{-5} + x^{-4} + \dots + x^9 + x^{10})$
- $x_3 \Rightarrow (x^4 + x^5 + \dots)$

↳ sada rješavamo:

$$x^{-3}(1 + x + x^2 + \dots) \cdot x^{-5}(1 + x + \dots + x^{15}) \cdot x^4(1 + x + x^2 + \dots) =$$

$$= x^{-3} x^{-5} \cdot x^4 (1 + x + x^2 + \dots)^2 \cdot (1 + x + \dots + x^{15}) =$$

$$= x^{-4} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{1-x^{16}}{1-x} = x^{-4}(1-x)^{-3}(1-x^{16})$$

↳ mi tražimo koeficijent uz x^{28}, pa iz umnoška $(1-x)^{-3}(1-x^{16})$ trebamo x^{32}:

$$\left(1 - \binom{-3}{1} x + \binom{-3}{2} x^2 - \dots + \binom{-3}{16} x^{16} - \dots + \binom{-3}{32} x^{32} + \dots\right)(1 - x^{16})$$

↳ rješenje je:

$$-\binom{-3}{16} + \binom{-3}{32} = 24 \cdot 17$$

$$-\binom{-3}{16} = (-1)\frac{(-3)(-2)\dots(-3-16+1)}{16!} = -\frac{18 \cdot 17 \cdot \cancel{16 \cdot \ldots \cdot 3}}{\cancel{16!}\, 2 \cdot 1} = -9 \cdot 17$$

$$\binom{-3}{32} = \dots = 17 \cdot 33$$

ZAD: 6 $\quad g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \cdot x^n$

↳ funkcija izvodnica:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Big/ '$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Big/ \cdot x$$

$$x f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \quad \Big/ '$$

$$f'(x) + x f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} \quad \Big/ \cdot x$$

$$x f'(x) + x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n$$

ZAD: 12 $\quad |X| = 5, \quad |Y| = 7, \quad |\mathcal{P}(X)| = 2^X$

$\mathcal{P}(X)$ = skup svih podskupova

↳ u našem slučaju:

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^5 = 32$$

$$|\{f: Y \to X\}| = 5^7$$

sada iz skupa od 5^7 trebamo preslikat u skup od 32:

$$5^7(5^7-1)(5^7-2)\cdot \ldots \cdot(5^7-31)$$

ZAD: 15 27 jabuka $\rightarrow$ 10 djece

↳ idemo gledat komplement tvrdnje:

- kada će svako dijete dobiti barem jednu jabuku: $\binom{17+9}{9} = \binom{26}{9}$

↳ ukupan broj načina:

$$\binom{27+9}{9} - \binom{26}{9}$$

ZAD: 25 $\Rightarrow$ riječ od 4 slova, 30 slova abecede

↳ svaki suglasnik najviše jedan

25 suglasnika, 5 samoglasnika

a) 4 suglasnika: $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$

b) 3 suglasnika: $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \underbrace{5 \cdot \binom{4}{1}}_{\text{odabir mjesta i samoglasnika}}$

c) 2 suglasnika: $25 \cdot 24 \cdot \underbrace{5^2 \cdot \binom{4}{2}}_{\text{odabir 2 samoglasnika i njihovih mjesta}}$

d) 1 suglasnik: $25 \cdot \underbrace{5^3 \binom{4}{3}}_{\text{odabir 3 samoglasnika i njihovih mjesta}}$

e) nema suglasnika: $\underbrace{5^4}_{\text{odabir 4 samoglasnika}}$

↳ rješenje je zbroj svih ovih slučajeva

FIBONACCIJEV NIZ

⇒ najpoznatija rekurzivna relacija

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

⇒ može li se rekurzivno zadan niz zapisati preko općeg člana?

↳ pokušajmo ovo sa Fibonaccijevim nizom:

- pretpostavimo da je opći član oblika:

$$a_n = x_0^{\,n}$$

↳ tada vrijedi:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0 \quad /: x^{n-2} \; ; \quad x \neq 0$$

↳ dobijemo jednadžbu:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

⇒ ovdje smo dobili kvadratnu jednadžbu - to je zato što nam je svako stanje rezultat prethodna dva stanja

⇒ rješenja gornje kvadratne jednadžbe:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

↳ iz ovoga zaključujemo: $F_n^{(1)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad F_n^{(2)} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

⇒ sada možemo pisat linearnu kombinaciju :

$$G_n = \lambda F_n^{(1)} + \mu F_n^{(2)}$$

$$G_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

↳ uz početne uvjete $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ možemo izračunat „λ" i „μ" :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

⇒ NAPOMENA: primjeti da je $\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$

↳ ovaj broj je zlatni rez

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$$

LINEARNE REKURZIVNE RELACIJE

⇒ oblik jednadžbe (rekurzivne) reda „r":

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n)$$

↳ vrijedi da je $n \geq r$

ZADATAK: 1 a) $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}$

$a_0 = 2$

$a_1 = 1$

$a_2 = 5$

↳ uvedemo Eulerove supstitucije:

$$x^n = 4x^{n-1} - x^{n-2} - 6x^{n-3} \quad / : x^{n-3}$$

$$x^3 = 4x^2 - x - 6 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

↳ treba naći nultočku

↳ napomena: u polinomu 3. stupnja, umnožak sva tri rješenja treba biti slobodan koeficijent (u našem slučaju je to -6, npr. $(-1)\,2 \cdot 3 = 6$)

↳ uvrstimo $x_1 = -1$ i vidimo da je rješenje:

$$(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 2$$

↳ sada su sve tri nultočke različite, pa naš opći član izgleda ovako:

$$a_n = \lambda_1 (-1)^n + \lambda_2 2^n + \lambda_3 \cdot 3^n$$

↳ još treba odrediti λ_1, λ_2 i λ_3!

↳ postavimo sustav:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (-1)^0 + \lambda_2 (2)^0 + \lambda_3 (3)^0 &= 2 \\
\lambda_1 (-1)^1 + \lambda_2 (2)^1 + \lambda_3 (3)^1 &= 1 \\
\lambda_1 (-1)^2 + \lambda_2 (2)^2 + \lambda_3 (3)^2 &= 5
\end{aligned}$$

↳ riješimo ovaj sustav i dobijemo tražene koeficijente:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 0$$

ZADATAK 1) b) $a_n + a_{n-2} = 0$ $\quad a_0 = -2$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ $\quad a_1 = 1$

$$a_n = \lambda_1 (i)^n + \lambda_2 (-i)^n$$

↳ sada uvrstimo početne uvjete:

$$-2 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1$$

$$1 = \lambda_1 \cdot i - \lambda_2 i$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{i} = -i$$

↳ riješimo ovaj sustav i dobijemo:

$$\lambda_1 = -1 - \frac{1}{2} i$$

$$\lambda_2 = -1 + \frac{1}{2} i$$

⇒ sada smo se bavili samo sa slučajevima kada smo imali različite nultočke

↳ sljedeći korak je vidjeti što treba promijeniti u postupku kada imamo nultočke više kratnosti

ZAD: Riješi rekurzivnu relaciju:

$$a_n = -2a_{n-1} - 3a_{n-2} - 2a_{n-3} - a_{n-4}$$

$$x^n = -2x^{n-1} - 3x^{n-2} - 2x^{n-3} - x^{n-4} \quad / : x^{n-4}$$

$$x^4 = -2x^3 - 3x^2 - 2x - 1$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

↳ jednu nultočku pogodimo ili shvatimo da nam je jednadžba oblika:

$$(x^2 + x + 1)^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ x_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}\right\}$$ iz ovoga zaključujemo: $r = 1$, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$

⇒ primjenjujemo formule za nultočke više kratnosti:

$$n r^n \cos(n\varphi)$$

$$n r^n \sin(n\varphi)$$

↳ naša rješenja su: $n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

$n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

↳ sada možemo pisat izraz za a_n:

$$a_n = \lambda_1 \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \lambda_3 n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \lambda_4 n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$a_n = (\lambda_1 + n\lambda_3)\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + (\lambda_2 + n\lambda_4)\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

⇒ u ovom zadatku nemamo zadane početne uvjete, pa je ovaj zadatak ovdje gotov

↳ da smo imali početne uvjete, računali bi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

⇒ sa konjugirano kompleksnim rješenjima će se uvijek desiti da je jedno s kutom „φ", a drug s kutom „$-\varphi$"

⇒ zadatke koje smo do sad rješavali nisu imali funkciju smetnje - prilikom Eulerove supstitucije ostali su nam samo „x"-evi

ZAD: 6 1) $a_n = A + B\cdot 2^n + C\, 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + D\cdot 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$

↳ iz ovoga isčitavamo:

$x_1 = 1 \qquad k_1 = 1$

$x_2 = 2 \qquad k_2 = 1$

$x_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$x_4 =$ „konjugirano gornje" $= 1 - i\sqrt{3}$

↳ iz ovoga pišemo:

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot\left[x-(1+i\sqrt{3})\right]\cdot\left[x-(1-i\sqrt{3})\right] =$$

$$= (x-1)(x-2)\left[x^2 - x(1 - \cancel{\sqrt{3}i} + 1 + \cancel{\sqrt{3}i}) + (1^2 + (\sqrt{3})^2)\right] =$$

$$= (x-1)(x-2)(x^2 - 2x + 4)$$

↳ sada još treba izmnožit jer nismo dobili rekurzivnu relaciju već samo karakteristični polinom:

$$(x-1)(x-2)(x^2-2x+4) = (x^2-3x+2)(x^2-2x+4) =$$

$$= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x^2 + 6x^2 - 12x + 2x^2 - 4x + 8 =$$

$$= x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 16x + 8$$

↳ iz dobivenog: $x^4 = 5x^3 - 12x^2 + 16x - 8$

$$\Rightarrow a_n = 5a_{n-1} - 12a_{n-2} + 16a_{n-3} - 8a_{n-4}$$

2) $b_n = A + B(-1)^n + C(1+i)^n + D i^n$

↳ ovdje nam je odmah nešto sumnjivo jer nam rješenja nisu konjugirano kompleksna

↳ posljedica toga je da će nam rekurzivna relacija imati imaginarne/kompleksne koeficijente čime se mi ne bavimo

↳ stoga, pišemo da ne postoji tražena rekurzivna relacija s realnim koeficijentima

LINEARNE NEHOMOGENE REKURZIVNE RELACIJE

⇒ sada postoji funkcija smetnje, ali nije mnogo kompliciranije

↳ postupci su analogni rješavanju diferencijalnih jednadžbi (također nehomogenih)

⇒ opet trebamo pogoditi partikularno rješenje

↳ ovo pogađanje radimo na temelju oblika funkcije smetnje

⇒ drugi način kod nehomogenih linearnih jednadžbi bio je varijacija konstante, no toga kod rekurzivnih relacija nema

⇒ OPĆE RJEŠENJE: $\boxed{a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(P)}}$

a_n → opće rješenje nehomogene rekurzivne relacije

$a_n^{(0)}$ → opće rješenje homogene rekurzivne relacije

$a_n^{(P)}$ → partikularno rješenje nehomogene rekurzivne relacije

ZADATAK 4 $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - 2n + 5 \cdot 3^n$

$a_0 = 0 \ , \ a_1 = 1$

↳ prvo uočimo homogenu jednadžbu:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

$$x^2 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \Rightarrow x = 2 \quad k_1 = 2$$

↳ rješenje homogene relacije (opće):

$$a_n^{(0)} = A \cdot 2^n + Bn\,2^n$$

↳ uočimo funkcije smetnje i pogađamo partikularna:

$$f_1(n) = -2n \rightarrow a_n^{(p_1)} = A_1 n + B_1$$

$$f_2(n) = 5 \cdot 3^n \rightarrow a_n^{(p_2)} = A_2 \cdot 3^n$$

⇒ sada sa svakim rješenjem idemo ponovno gore u opće rješenje:

a) PRVO PARTIKULARNO:

$$A_1 n + B_1 = 4\left[A_1(n-1) + B_1\right] - 4\left[A_1(n-2) + B_1\right] - 2n$$

$$A_1 n + B_1 = 4A_1 n - 4A_1 + 4B_1 - 4A_1 n + 8A_1 - 4B_1 - 2n$$

$$A_1 n + B_1 = -2n + 4A_1$$

OKRENI

↳ imamo polinom na lijevoj i desnoj strani, pa pišemo sustav:

$$A_1 = -2$$
$$\underline{B_1 = 4A_1}$$

} neće uvijek biti tako jednostavan sustav

$$B_1 = -8$$

$$\boxed{a_n^{(p_1)} = -2n - 8}$$

b) DRUGO PARTIKULARNO:

$$A_2 \cdot 3^n = 4A_2 \cdot 3^{n-1} - 4A_2 \cdot 3^{n-2} + 5 \cdot 3^n \quad / : 3^{n-2}$$

$$A_2 \cdot 9 = 4A_2 \cdot 3 - 4A_2 + 5 \cdot 9$$

$$9A_2 = 8A_2 + 45 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 45$$

$$\boxed{a_n^{(p_2)} = 45 \cdot 3^n}$$

⇒ sada se sa ovim rješenjima vraćamo u razmanje da je $a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(p)}$:

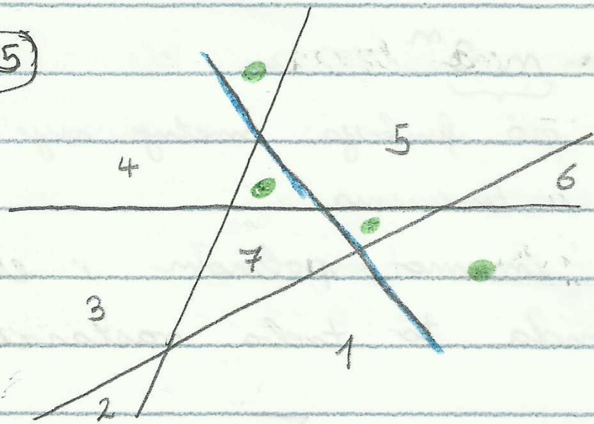
$$a_n = (A + Bn)\,2^n - 2n - 8 + 45 \cdot 3^n$$

↳ koristimo početne uvjete da dobijemo sustav kako bi izračunali koeficijente A i B:

$$A = -37 \quad ; \quad B = -25$$

↳ sa ovim koeficijentima imamo točno opće rješenje nehomogene rekurzivne relacije

ZADATAK: 5



⇒ plavi pravac je dodan četvrti, on u općenitom slučaju dodaje 4 nova dijela ravnine (označeni zelenom točkicom)

↳ iz napisanog, možemo pisati rekurzivnu relaciju:

$$h_n = h_{n-1} + n$$

↳ još trebamo početne uvjete:

$$h_1 = 2$$

$$h_2 = 4$$

⇒ sada imamo zadanu rekurzijsku relaciju sa smetnjom, pa ju rješavamo analogno prošlom primjeru

⑦ $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + \underbrace{n\,3^n}$

na funkciju smetnje nije definirana u teoremima

↳ NAPOMENA: ako imamo polinom i eksponencijalnu funkciju, onda to treba rastaviti na sumu:

$$P_k(n) \cdot b^n = \sum n^i b^n$$

↳ stoga, rješavamo klasično, samo što partikularno rješenje moramo pogoditi

↳ pišemo karakteristični polinom homogene:

$x^2 = 6x - 9 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 3$

$a_n^{(h)} = \lambda_1 3^n + \lambda_2 n 3^n$

⇒ sada pogađamo partikularno rješenje:

$$a_n^{(p)} \begin{cases} \longrightarrow n \longrightarrow Cn + D \\ \longrightarrow 3^n \longrightarrow n^2 3^n \end{cases} \Big\} (Cn + D) \cdot n^2 3^n$$

↳ ovo smijemo ovako raditi (posebno promatramo jednu, pa drugu smetnju)

⇒ sada treba odrediti „C" i „D" vraćajući se u gornju jednadžbu:

$$\left[C(n+2)+D\right] \cdot (n+2)^2 3^{n+2} = 6\left[C(n+1)+D\right](n+1)^2 \cdot 3^{n+1} + 9(Cn+D)n^2 \cdot 3^n + n3^n \Big/ 3^n$$

↳ upravo zbog ovog dijeljenja će se eksponencijalna funkcija smetnje skratiti, pa je to znak da smo smjeli na ovaj način pogađati partikularno rješenje:

$$\left[Cn+2C+D\right](n+2)^2\cdot 9 = 6\,(Cn+C+D)(n+1)^2\cdot 3 - 9\,(Cn+D)n^2 + D$$

$$9(Cn+2C+D)(n^2+4n+4) = 18\,(Cn+C+D)(n^2+2n+1) - 9Cn^3 + 9Dn^2 + D$$

$$9(Cn^3+4Cn^2+4Cn+2Cn^2+Dn^2+8Cn+4Dn+8C+4D) = 18\,(Cn^3+2Cn^2+$$
$$+Cn+Cn^2+Dn^2+2Cn+2Dn+C+D) - 9Cn^3 - 9Dn^2 + n$$

↳ sada iz ovoga treba izaći, pa se možemo koristiti ovakvim zapisom:

ovo je dobro !

n^3	$9C - 18C + 9C = 0$
n^2	$\cancel{36C} + \cancel{18C} + \cancel{9D} - \cancel{36C} - 18C - 18D + \cancel{9D} = 0$
n	$\cancel{36C} + 72C + \cancel{36D} - 18C - \cancel{36C} - \cancel{36D} - 1 = 0$
1	$72C + 36D - 18C - 18D = 0$

suvišne jednadžbe, ali je to dobar znak da smo pretpostavili dobro partikularno rješenje

$$54C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{54}$$

$$54C + 18D = 0 \Rightarrow 18D = -1 \Rightarrow D = -\frac{1}{18}$$

↳ sada se samo vratimo i zapišemo rješenje kao:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

⑨ 1) ↳ treba pametno nazvati a_n

• a_n je Perino financijsko stanje

$a_0 = 100\,000$

$a_1 = 100000 \cdot 1.075 + 10\,000$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} \cdot 1.075 + 10\,000$

↳ riješimo rekurzivnu relaciju i onda tražimo „n" za koji je a_n veći od 40.8000

⇒ homogena:

$$a_n = a_{n-1} \cdot 1.075 \quad \Rightarrow \quad x = 1.075$$

$$a_n^{(h)} = \lambda_1 \cdot 1.075^n$$

⇒ partikularno: → imamo konstantu pa je naše rješenje oblika: $a_n^{(p)} = A$

↳ uvrstimo u početnu jednadžbu i dobijemo:

$$A = -133\;333$$

⇒ opće rješenje rekurzivne relacije:

$$a_n = \lambda \cdot 1.075^n - 133\,333$$

↳ iz početnih uvjeta: $\lambda = 233\,333$

↳ tražimo „n" za $a_n \geq 40.8000$!

(24) $a_n \rightarrow$ broj traženih nizova znamenki

zadnja znamenka parna

• predzadnja je bilo koja

↳ a_{n-1}

zadnja znamenka neparna

• predzadnja je 2

↳ $a_{n-2} \cdot 2$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

$a_0 = 0$

$a_1 = 3$

$a_2 = \left| [1\ 2], [3\ 2], [2\ 3], [2\ 2], [2\ 1] \right|$

TEORIJA GRAFOVA 1

POJAM GRAFA

⇒ bit će vrlo bitno koliko bridova izlazi iz nekog vrha grafa

↳ štoviše, bit će bitnije da li je taj broj bridova paran ili neparan

⇒ JEDNOSTAVNI GRAF se sastoji od:

- vrhova
- bridova

↳ u jednostavnom grafu brid mora biti iz jedan vrh u neki drugi i to samo jednom (ne može biti brid AB, BA)

⇒ IZOMORFNI GRAFOVI:

↳ ako vrhove ispermutiramo, mora se čuvati svojstvo incidencije

↳ izomorfnost možemo odmah eliminirati ako u jednom grafu npr. postoji vrh sa dva brida, a u drugom grafu takav vrh ne postoji

⇒ grafovi s različitim imenima vrhova ne mogu biti isti, ali mogu biti izomorfni

⇒ POTPUNI GRAF:

↳ graf u kojem je svaki vrh povezan sa svim ostalim vrhovima

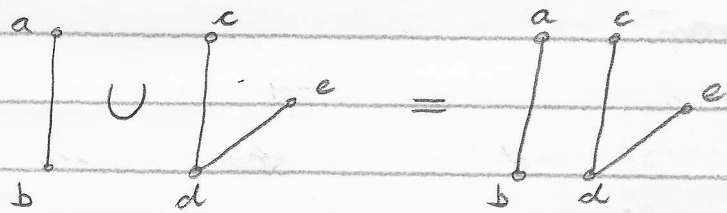
↳ za ovaj naš slučaj vrijedi:

$n = 4$, bridova je 6

↳ primjeti da u potpunom grafu u općenitosti imamo ovoliko bridova:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

⇒ UNIJA GRAFOVA:



⇒ POVEZANOST GRAFOVA:

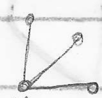
↳ graf je povezan ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa

↳ u suprotnom, graf je nepovezan

⇒ STUPANJ VRHA:

↳ broj bridova grafa koji su incidentni s tim vrhom (zapravo, to je broj vrhova koji izlaze iz tog vrha)

↳ oznaka: $deg(v)$



$deg(v) = 3$

⇒ LEMA O RUKOVANJU:

↳ u svakom grafu je zbroj svih stupnjeva vrhova je paran

$$\sum_{v \in G} \deg(v) \equiv 0 \pmod{2}$$

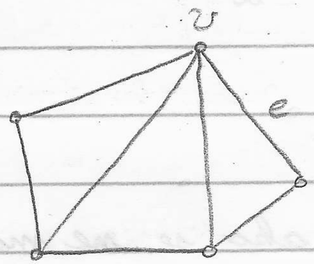
↳ ime je proizašlo iz veze da je prilikom rukovanja ljudi uvijek uključeno paran broj ljudi

⇒ iz leme o rukovanju proizlazi:

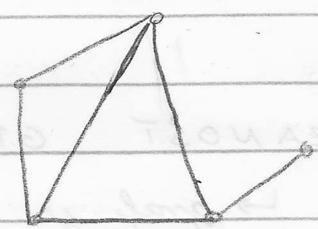
↳ broj vrhova neparnog stupnja mora biti paran

ZADATAK 2.

G



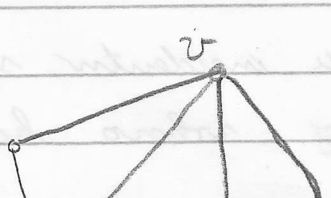
$\xrightarrow{G-e}$



$|V(G-e)| = n$

$|E(G-e)| = m-1$

$\Downarrow$ $G \setminus e$ ← kontrakcija



$|V(G \setminus e)| = n-1$

$|E(G \setminus e)| = m-1$

⇒ LISTA BRIDOVA:

↳ skup svih parova vrhova koji čine bridove

⇒ LISTA SUSJEDSTVA:

↳ popis susjednih vrhova za svaki vrh grafa

- npr. $u: \{v, y\}$

vrh „u" je susjedan „v" i „y"

⇒ MATRICA SUSJEDSTVA: za graf G je $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

↳ definirajmo matricu susjedstva kao matricu dimenzija $n \times n$ čiji je element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju „i" i „j"

↳ za jednostavan graf vidimo da je to matrica nula i jedinica

⇒ MATRICA INCIDENCIJE: za graf G je $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

i $E = \{1, 2, \dots, m\}$

↳ definirajmo matricu incidencije kao matricu dimenzija $n \times m$ takvu da je b_{ij} ovakav:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{„i" incidentan s „j"} \\ 0, & \text{ako nije} \end{cases}$$

ZADATAK 3

↳ imamo npr. dva vrha i imamo jednostavan graf:

ili

↳ sada razmišljajmo općenito: imamo graf od „n" vrhova i graf je jednostavan:

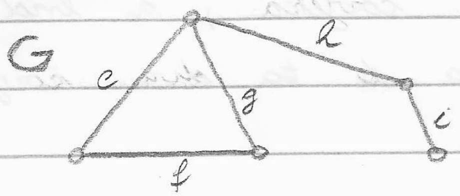
- mogući stupnjevi su:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$$

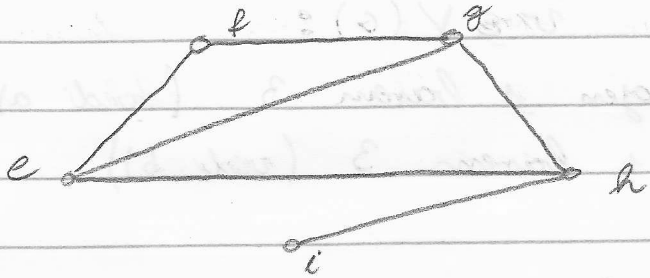
↳ nacrtamo par grafova i uvidimo da u isto vrijeme ne mogu postojat stupnjevi „n-1" i stupanj nula

↳ stoga, imamo „n" vrhova, a „n-1" mogućnost za stupnjeve, pa po Dirichletovu načelu slijedi da barem dva vrha imaju isti stupanj

ZADATAK 5 ↳ imamo, npr. ovakav graf:



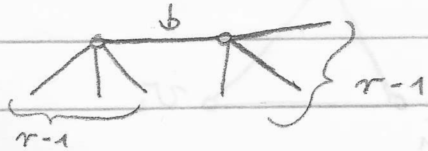
↳ <u>bridni graf</u> ima onoliko vrhova koliko graf G ima bridova te se dva vrha spajaju ako su odgovarajući bridovi u grafu G susjedni:



⇒ pa, krenimo dokazati:

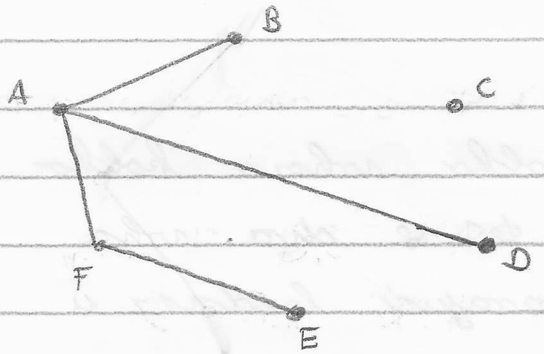
↳ neka je G stupnja regularnosti „r":

↳ stoga, svaki brid u G je susjedan s $r-1 + r-1$ bridova:



↳ slijedi da je stupanj svakog vrha u bridnom grafu od G (oznaka $L(G)$) jednak $2r-2$

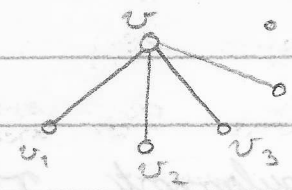
ZADATAK 6 ↳ načinimo graf tako da svaki vrh modelira jednog čovjeka, a brid između vrhova znači da se ta dva čovjeka poznaju



↳ uzmimo neki vrh $v \in V(G)$:

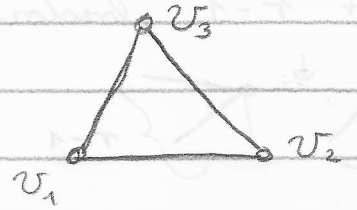
• v je spojen s barem 3 (vidi a)) ili nije spojen s barem 3 (vidi b))

a)



→ „v" je spojen ako je neki v_i spojen s v_j (imamo zapravo „trokut" v, v_i, v_j), ako v_1, v_2, v_3 nisu međusobno spojeni

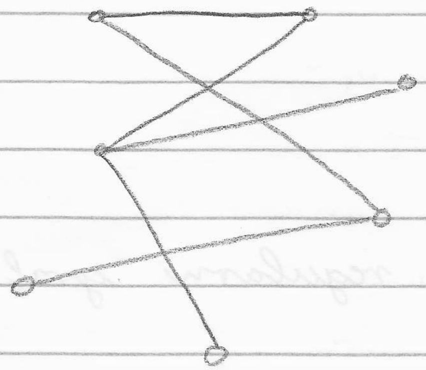
b) → ako su v_i i v_j spojeni $\forall i, j$, onda imamo trokute:



⇒ mi ustvari trebamo pokazati da ne postoje niti trokut niti prazni trokut:

„trokut"   „prazni trokut"

ZADATAK 8 ↳ vrhovi modeliraju osobe, a bridovi će biti spojeni ako su te osobe odigrale partiju:



⇒ imamo jednostavan graf

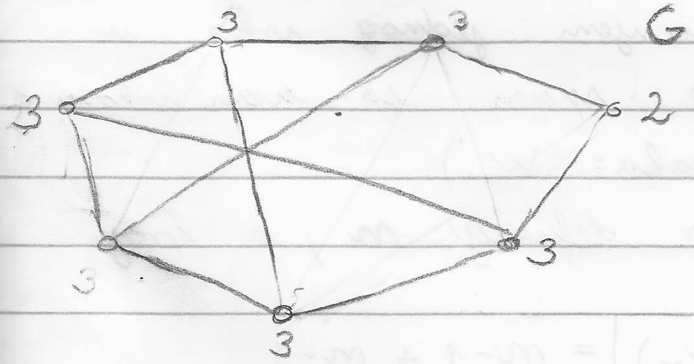
↳ mi tražimo najveći broj bridova u grafu sa 7 vrhova gdje je najveći stupanj vrha jednak tri

⇒ postoji li 3-regularni graf sa 7 vrhova?

↳ primjenimo lemu o rukovanju:

- odgovor je ne jer broj vrhova neparnog stupnja mora biti paran

↳ stoga smanjimo stupanj jednog vrha te dobijemo:



broj bridova:

- 6 stupnja 3
- 1 stupnja 2

$$6 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 2|E(G)|$$

$$|E(G)| = 10$$

⇒ POTPUNI GRAF:

↳ svaka dva vrha su susjedna

↳ stoga, broj bridova grafa je:

$$|E(G)| = \binom{n}{2}$$

⇒ CIKLIČKI GRAF:

↳ povezan, jednostavan 2 regularni graf

↳ oznaka: C_n

↳ broj vrhova je n, a broj bridova je također „n"

⇒ LANAC:

↳ graf dobiven iz cikličkog grafa brisanjem jednog brida

⇒ KOTAČ:

↳ graf dobiven dodavanjem jednog vrha u ciklički graf koji je spojen sa svim vrhovima cikličkog grafa (oznaka: W_n)

↳ broj vrhova je po definiciji n, a broj bridova je:

$$|E(W_n)| = \underbrace{n-1}_{\text{za } C_{n-1}} + \underbrace{n-1}_{\text{ovaj dodani vrh}}$$

$$|E(W_n)| = 2n-2$$

⇒ BIPARTITNI GRAF:

↳ graf kod kojeg vrhove podijelimo u dva skupa A i B te vrhovi iz A jedino mogu biti spojeni sa vrhovima iz B

- primijeti da je svaki lanac ujedno i bipartitni graf

↳ <u>potpuni bipartitni graf</u>:

↳ bipartitni graf kod kojega je svaki vrh iz A spojen sa svakim vrhom iz B

↳ oznaka: $K_{r,s}$

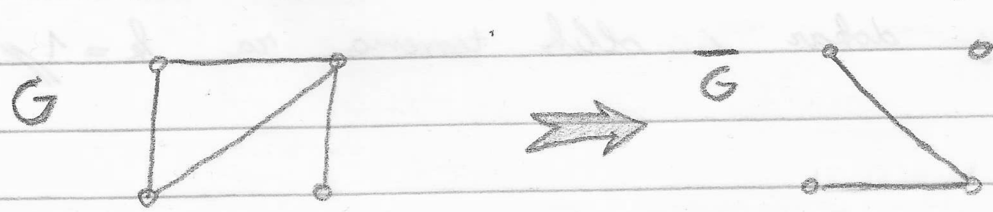
⇒ pogledaj primjer 13 iz knjižice

↳ koristan način razmišljanja prilikom kodiranja i modeliranja nekog problema

⇒ KOMPLEMENTARNI GRAF:

↳ neka je G jednostavan graf

↳ njegov komplement $\overline{G}$ je jednostavni graf sa skupom vrhova $V(\overline{G}) = V(G)$, ali su dva vrha u $\overline{G}$ susjedni ako i samo ako ta dva vrha nisu susjedna u G



$$|E(G)| + |E(\overline{G})| = \binom{n}{2} \Rightarrow |E(\overline{G})| = \binom{n}{2} - |E(G)|$$

POVEZANOST

⇒ glavno pitanje: možemo li iz jednog vrha doći u neki drugi?

⇒ ŠETNJA ⇒ konačan slijed bridova oblika $v_0 v_1, v_2 v_3, \dots, v_{m-1} v_m$ (često pisano $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_m$) u kojem su svaka dva brida susjedna ili jednaka

↳ riječ „jednaka" dozvoljava petlje

↳ najslobodnije putovanje grafom

⇒ STAZA ⇒ šetnja u kojoj su svi bridovi različiti

⇒ PUT ⇒ staza u kojoj su svi vrhovi različiti

⇒ nama će glavna metoda u zadacima biti prepoznavanje „kostura" grafa – to je graf koji nema ciklusa

↳ nad kosturom ćemo izgraditi ostatak grafa

⇒ TEOREM: neka je G jednostavan graf s „n" vrhova. Ako G ima „k" komponenata povezanosti, onda za broj bridova „m" od G vrijedi:

$$\boxed{n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}}$$

↳ pogledaj dokaz i oblik teorema za $k=1$ //

⇒ ŠUMA ⇒ graf bez ciklusa

⇒ STABLO ⇒ povezana šuma

⇒ NAPOMENA: pogledaj teorem 5 i nauči dokaze jer se puno primjenjuju u zadacima

⇒ razapinjajuće stablo – stablo dobiveno na način da uočimo ciklus u danom grafu i iz njega uklonimo jedan brid iz tog ciklusa te tada taj postupak ponavljamo dok ne dobijemo stablo (graf više ne sadrži cikluse)

⇒ prouči zadatak 8 (težak, ali ima koristan način razmišljanja)

PROBLEM NAJKRAĆEG PUTA

⇒ pogledajmo kompleksni graf iz knjižice na stranici 48:

A	$\boxed{0}$	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
B	∞	3	$\boxed{3}$	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
C	∞	$\boxed{2}$	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
D	∞	∞	∞	$\boxed{5}$	/	/	/	/	/	/	/	/	/
E	∞	9	8	7	$\boxed{7}$	/	/	/	/	/	/	/	/
F	∞	∞	11	11	11	11	11	$\boxed{10}$	/	/	/	/	/
G	∞	∞	∞	∞	8	$\boxed{8}$	/	/	/	/	/	/	/
H	∞	∞	∞	∞	∞	9	$\boxed{9}$	/	/	/	/	/	/
I	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$\boxed{12}$	/	/	/	/
J	∞	∞	∞	∞	∞	∞	13	13	13	$\boxed{13}$	/	/	/
K	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	15	15	14	$\boxed{14}$	/	/
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	18	18	18	18	$\boxed{17}$	/

↳ primjetiti da su brojevi u kvadratiću zapravo najkraći put do tog određenog vrha.

↳ ovo je poznati DIJKSTRIN ALGORITAM

⇒ ako iz tablice želimo pronaći (rekonstruirati) najkraći put, moramo se vraćati unatrag:

L ← K ← I ← F ← H ← E ← B ← A

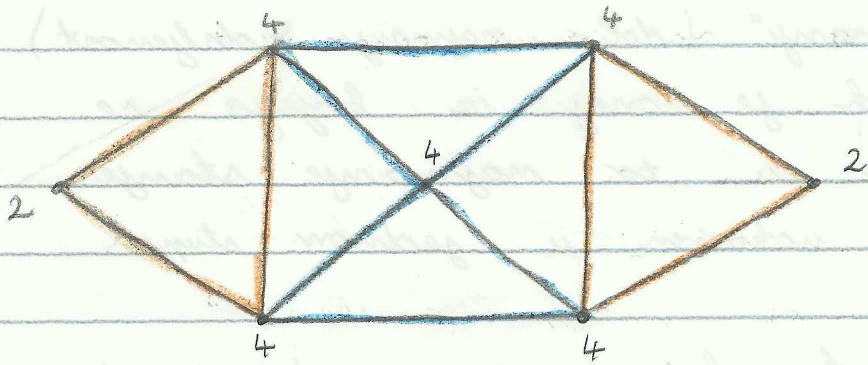
⇒ ALGORITAM ZA KONSTRUKCIJU NAJKRAĆEG PUTA:

- kreni od vrha do kojeg smo željeli doći
- pogledaj u kojem je koraku taj vrh postao „najmanji" (dobio najmanju udaljenost)
- sljedeći vrh je onaj iz kojega se došlo upravo u to najmanje stanje (onaj koji je uokviren u jednom stupcu lijevo)
- ovaj postupak ponovi sve do zadnjeg vrha (onog od kojega smo krenuli crtati tablicu)

⇒ pogledaj zadatak 8 iz zadataka za vježbu (konstrukcija grafa i primjena Dijkstrinog algoritma) – minimalna dva puta primjeni Dijkstrin algoritam i onda ostale prebroji „na prste"

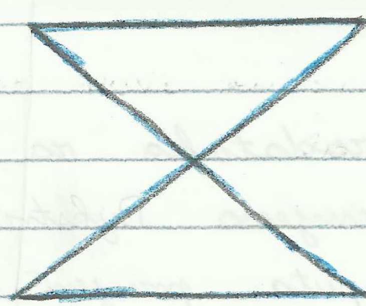
↳ NAPOMENA: dobra praksa je u zadacima s proizvoljnim početkom uzeti za vrh onaj koji je povezan s najvećim brojem drugih vrhova kako bi u prvom koraku popunili najveći dio tablice

EULEROVSKI GRAFOVI



⇒ eulerovski graf

⇒ primjet da svaki vrh ima parni stupanj



⇒ primjet da je ovo ciklus, pa se možemo vratit u onaj vrh iz kojega smo krenuli

⇒ EULEROVSKI GRAF ⇒ graf koj sadrži zatvorenu stazu koja sadrži svaki brid toga grafa

⇒ SEMI-EULEROVSKI GRAF ⇒ neeulerovski graf koj može imat takvu „eulerovsku stazu", al ne iz svakog vrha (ima dva vrha neparnog stupnja)

⇒ eulerovski graf ima veliku povezanost s ciklusima

⇒ EULEROV TEOREM: povezan graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran

↳ pogledaj dokaz ovog teorema!

⇒ posljedica Eulerovog teorema:

↳ povezan graf je eulerovski onda i samo onda ako se njegov skup bridova može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa

⇒ FLEURYEV ALGORITAM:

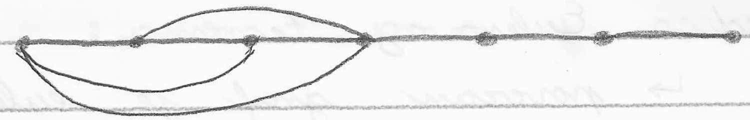
↳ opisuje način konstruiranja eulerovske staze u eulerovskom grafu na općenit način:

- prebriši sve bridove kojima si prošao i sve izolirane vrhove
- prijeđi mostom trenutnog grafa samo ako nemaš druge mogućnosti

↳ pogledaj dokaz ovog teorema!

(3) ⇒ najmanje bridova će imati lanac, pa krenimo od $n=7$:

↳ dodamo bridove na prva četiri (bilo koja četiri vrha):



↳ uvidimo da je broj vrhova isti, a broj bridova: $n-1+3$

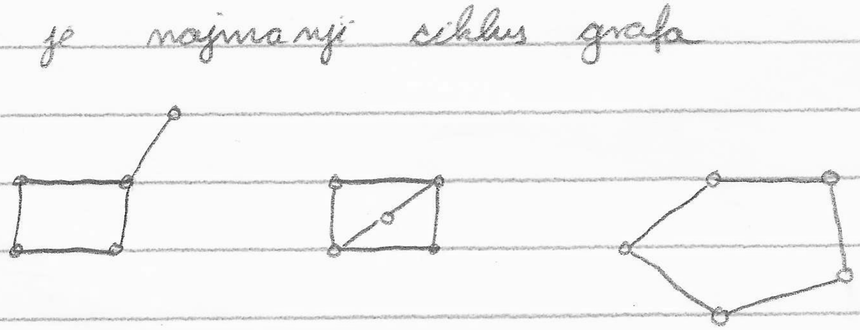
(5) ⇒ VRŠNA POVEZANOST - najmanji broj vrhova koji treba izbrisati da izgubimo povezanost

(6) ⇒ uzmimo $k=2$:

$$\begin{array}{ccc}(0,0) & - & (0,1)\\ | & & |\\ (1,0) & - & (1,1)\end{array}$$

⇒ vidimo da će kocke višeg reda uvijek biti povezane

(8) ⇒ struk je najmanji ciklus grafa



↳ postoje 3 tražena grafa

HAMILTONOVSKI GRAFOVI

⇒ graf koji sadrži hamiltonovski ciklus - ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa

↳ stoga, takva „staza" sadrži svaki brid samo jednom (al ne mora sadržati sve bridove)

⇒ intuitivno zaključujemo da ako imamo više bridova, veća je šansa da postoji hamiltonovski ciklus

↳ potpuni graf je sigurno hamiltonovski

⇒ OREOV TEOREM:

↳ ako za jednostavan graf vrijedi:

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$, za svaki par nesusjednih vrhova „v" i „w" grafa G, onda je G hamiltonovski graf

↳ pogledaj dokaz!