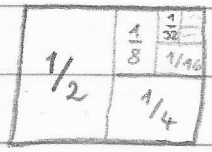
REDOVI

⇒ geometrijski niz:

– $\boxed{a_n = q^n}$ → npr. $q = 1/2 \Rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

↳ ako ovo pretvorimo u red:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = ?$$



→ intuitivno vidimo da ovaj red nikad neće preći 1

⇒ DEFINICIJA REDA:

↳ red je određen nizom

$$\sum a_n$$

↳ red možemo gledati kao uređen par dva niza: (a_n, S_n)

⇒ KONVERGENCIJA REDA:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \forall \varepsilon > 0 \rightarrow n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\underbrace{n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon}$

„gotovo svi"

↳ *limesi niza:*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \\ &\lim_{n\to\infty} b_n = b \in R \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b \\ &\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab \\ &\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

↳ NAPOMENA: $\lim_{n\to\infty} a_n$ kraće pišemo $\lim_{n} a_n$

PR: $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n} S_n = \lim_{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

↳ *kako sumu napisat bez tri točkice:*

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$\downarrow$$

$$1 - q^n = (1-q)\left(1 + q + \dots + q^{n-1}\right) \quad / : (1-q)$$

$$\frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

↳ primjenimo ovu formulu na početno zadani geometrijski red:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

⇒ dobro za znat:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}\quad;\ |q|<1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n=\frac{q}{1-q}\quad;\ |q|<1$

ZAD: 17

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-(n-2)}=\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\cdot 3^2=9\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=9\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}$

ZAD: 1 $\frac{1}{4\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots\dots$

↳ provjera za $n=1$:

$$\frac{1}{4\cdot 1} = \frac{1}{1\cdot 4} \checkmark$$

$$\frac{1}{(3x-2)(3x+1)} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+1}$$

↳ rastav na parcijalne razlomke:

$$1 = A(3x+1) + B(3x-2)$$

↳ uvrsti multiple polinoma umjesto koeficijenata

↳ NAPOMENA: ovaj postupak funkcionira samo ako je zbroj koeficijenata kod rastava jednak nuli

$$A = \frac{1}{3} \; ; \; B = -\frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}}{1} - \frac{\frac{1}{3}}{4} + \frac{\frac{1}{3}}{4} - \frac{\frac{1}{3}}{7} + \dots + \frac{\frac{1}{3}}{3n-2} - \frac{\frac{1}{3}}{3n+1} \checkmark$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$

⇒ NAPOMENA:

a) $q = 1$

$S_n = n \Rightarrow S = \lim_n S_n = \infty$

↳ red divergira

b) $q = -1$

S_n → $S_{2k} = 0$

S_n → $S_{2k+1} = 1$

$S = \lim_n S_n \notin \mathbb{R}$

↳ ovaj niz ima dva gomilišta, pa ovaj limes ne postoji

⇒ NUŽAN UVJET KONVERGENCIJE:

↳ teorem oblika $A \Rightarrow B$

$A :=$ niz je konvergentan

$B := \lim_n a_n = 0$

↳ da bi $\sum a_n$ konvergirao, nužno je da bude $\lim_n a_n = 0$

OKRENI

↳ DOKAZ:

$$\lim_n a_n = a \quad ; \quad \lim_n a_{n-1} = a$$

↓ primjen na S_n

$$\boxed{\lim S_n = \lim S_{n-1}}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

↓ pustimo na limes

$$\lim_n a_n = \lim_n S_n - \lim_n S_{n-1} = S - S = 0 \;//$$

⇒ kako bi vidjeli da ovo nije i dovoljan uvjet za konvergenciju, pogledaj harmonijski red (PRIMJER 7) te sljedeći primjer:

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{VI } 1/2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\text{VI } 1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\text{VI } 1/2} + \dots$$

↳ vidimo da je suma 2^k elemenata uvijek veća od „k", a „k" je proizvoljan, pa ovaj niz divergira (spor, ali divergira)

REDOVI S POZITIVNIM ČLANOVIMA

⇒ dosada smo imali samo dva postupka računanja sume reda:

1.) geometrijski red

2.) rastav na parcijalne razlomke

⇒ sada ćemo za ispitivanje konvergencije koristiti sljedeće postupke / uvjete:

0.) nužan uvjet konvergencije

1.) kriterij usporedivanja

2.) Cauchyjev kriterij

3.) D'Alembertov kriterij

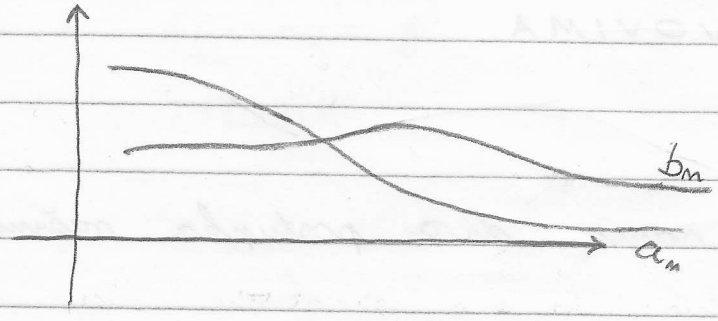
4.) Cauchyjev integralni kriterij

5.) Leibnitzov kriterij

↳ ima još mnogo kriterija, ali ovi su nama dovoljni

⇒ kako bi koristili kriterij usporedivanja, trebamo znati što više konvergentnih redova kako bi mogli ograničavati redove poznatim redovima

⇒ KRITERIJ USPOREĐIVANJEM:



↳ manji red od konvergentnog je konvergentan, a veći od divergentnog je divergentan

$$a_n \leq b_n \quad / \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

PR: Znamo da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira. Dokaži da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ konvergira!

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$$

$$n^2+n > n^2$$

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$$

↓

ne znamo ništa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$n^2-n < n^2$$

$$\frac{1}{n^2-n} > \frac{1}{n^2}$$

↓

sada znamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira

PR: $a_n = \frac{1}{n^2}$; $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)n}} = \lim_n \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$$

↳ ovo je usporedni kriterij pomoću limesa

⇒ ako konvergira red a_n, onda sigurno konvergira i red $L \cdot a_n$

ZAD: 3

1. $$\lim_n a_n = \lim_n \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \left[1^\infty\right] = \lim_n \left(1 + \frac{2n}{2n+1} - 1\right)^n =$$

$$= \lim_n \left(1 + \frac{2n - 2n - 1}{2n+1}\right)^n = \lim_n \left(1 + \frac{(-1)}{2n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_n \left(1 + \frac{(-1)}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{(-1)} \cdot \frac{(-1)}{2n+1} n} =$$

$$= \lim_n \left[\left(1 + \frac{(-1)}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{(-1)}}\right]^{\frac{-n}{2n+1}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$

↳ red divergira

ZAD: 19

1) $\lim_n \frac{n-1}{(n+1)2^n} = \lim_n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} = 0$

$a_n = \frac{n-1}{(n+1)2^n} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{\frac{n-1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)2^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentan

2) $\lim_n \frac{\frac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)^3}}{\frac{n^2}{n^4}} = \lim_n \frac{(n+2)(n+3)\,n^4}{n^2 \cdot (n+1)^3 n} =$

$= \lim_n \frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{n+3}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3} = \frac{1 \cdot 1}{1^3} = 1$

↳ red je konvergentan

4) $\sum a_n \sim \sum \frac{n}{n^2 \cdot n^{1/2}}$

↳ raspiši i odredi limes

5) $\lim_n \frac{(n+1)^n}{n^{2n}} = \lim_n \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot n^n} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^n} = e \cdot 0 = 0$

↳ nužan uvjet je zadovoljen

$$\sum a_n = \sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^n} \overset{?}{\sim} \sum \frac{1}{n^n}$$

$$\lim_n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^n}} = e \neq 0$$

↳ znači, ovi redovi su isti po tipu, pa treba pokazati je li $\sum \frac{1}{n^n}$ konvergentan

$$\sum \frac{1}{n^n} = ?$$

$$n^n > n^2$$

$$\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2} \quad ; \text{ za dovoljno velik } n$$

↳ znamo da je $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergentan, pa je ovaj niz koji je „manji" sigurno isto konvergentan

ZAD: 20

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

↳ odmah vidimo da je nužan uvjet zadovoljen

↳ trebamo limes: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\mu x}{x^2} = \frac{\mu}{2}$

↳ probajmo s nizom $\sum \frac{1}{n^2}$ i krenimo u usporedivanje s limesom

ZAD: 18 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)}$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ 2 \Rightarrow \ln 2 \\ \infty \to \ln b \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{t \ln t} = \left| \begin{matrix} u = \ln t \\ du = \frac{1}{t} dt \\ \ln 2 \to \ln(\ln 2) \\ \ln b \to \ln(\ln b) \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{\ln\ln 2}^{\ln\ln b} \frac{du}{u} = \lim_{b\to\infty} \ln u \Big|_{\ln(\ln 2)}^{\ln(\ln b)} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(\ln(\ln b)) - \ln(\ln(\ln 2)) \right]$$

↳ ovo teži u beskonačno pa polazni red divergira

D'ALEMBERTOV I CAUCHYJEV KRITERIJ

⇒ **D'Alembertov kriterij:**

↳ postoji li $a_n > 0$; $\underbrace{\sum a_n \leq \sum q^n}_{a_n \leq q^n \quad \forall n > N}$

↳ $q \in \langle 0, 1 \rangle$ garantira da red konvergira

ZAD: 21) 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$0 < n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n < q^n \qquad \forall n > N$$

$$0 < \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} < q$$

$a_n = \sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \Rightarrow$ teži k 1 za dovolno veliki „n"

$q = \frac{2}{3} < 1$

raključak je da naš polazni red konvergira

⇒ dokaz D'Alembertovog kriterija:

$\sum a_n \Rightarrow$ red s pozitivnim članovima

1) Ako postoji broj $q < 1$ takav da za gotove sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ tada red konvergira
2) Ako za gotovo sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tada red divergira (znači, u polarnom redu smo našli red koji divergira, pa sigurno divergira i polarni red)

DOKAZ:

1) $N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \ldots \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq q \Rightarrow a_{N+1} \leq q \cdot a_N$$

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq q \Rightarrow a_{N+2} \leq q \cdot a_{N+1} \leq q \cdot q \cdot a_N = q^2 \cdot a_N$$

$$\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \leq q \Rightarrow a_{N+3} \leq q \cdot a_{N+2} \leq q \cdot q^2 a_N = q^3 a_N$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

↳ zaključujemo induktivno:

$$a_{N+k} \leq q^k a_N$$

$$\sum_{n=1}^{N+k} a_n \leq a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N + a_N \cdot \sum_{i=1}^{k} q^n < a_n \cdot \frac{q}{1-q}$$

⇒ limes varijanta D'Alembertovog kriterija:

$\sum a_n$ ⇒ red s pozitivnim članovima

↳ ako postoj limes: $q = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tada vrijedi:

1) za $q < 1$ red konvergira
2) za $q > 1$ red divergira
3) za $q = 1$ nema odluke

ZAD: 21) 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}$

$a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}$ → vidimo da u ovakvim slučajevima najbolje pomaže D'Alembertov kriterij jer će se puno toga kratit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n(2n+2)}{4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)\cdot(3n+4)}}{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}} = \frac{2n+2}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1$$

↓
red konvergira

NAPOMENA: primijenimo limes kriterij usporedivanja s redom $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ zbog razumijevanja gornjeg limesa

$$\lim_n \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{2^n} \cdot \frac{3^n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n+1)} =$$

$$= \lim_n \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{3n+1}\right) \neq 0$$

⇒ Cauchyjev kriterij je slican D'Alembertovom, pa ga pogledaj u knjizici

ZAD: 21 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n+2)}}{\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}} = \frac{2}{3} < 1$$

↓

polazni red konvergira

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!\, e^n)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, e^n}$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!\, e^{n+1}}}{\frac{1}{n!\, e^n}} = \lim_n \frac{n!\, e^n}{(n+1)!\, e^{n+1}} = \lim_n \frac{1}{(n+1)e} = 0$$

↗

jaka konvergencija

⇒ NAPOMENA: kada god vidimo faktorijele, koristimo D'Alemberta !

⇒ NAPOMENA: kada vidimo $\sqrt[n]{\cdots}$ koristimo Cauchyja

⇒ NAPOMENA: kada imamo redove oblika:

$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$, ne možemo donijeti odluku

⇒ NAPOMENA: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

APSOLUTNO KONVERGENTNI REDOVI

⇒ do sada su svi kriteriji zahtjevali da imamo red s pozitivnim članovima (osim nužnog uvjeta konvergencije)

⇒ red $\sum a_n$ konvergira apsolutno ako mu konvergira red apsolutnih vrijednosti ($\sum |a_n|$)

DOKAZ:

$\sum a_n$ konvergira apsolutno

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$$

a_n	1	2	-3	4	-5	6
a_n^+	1	2	0	4	0	6

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & a_n \leq 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}$$

a_n	1	2	-3	4	-5	6
a_n^-	0	0	3	0	5	0

↳ budući da: $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$

$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$

$$\sum a_n^+ \leq \sum |a_n| < \infty$$

$$\sum a_n^- \leq \sum |a_n| < \infty$$

↳ prema kriteriju usporedbe, redovi konvergiraju

⇒ UVJETNA KONVERGENCIJA:

↳ red $\sum a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutna

↳ uvjetno konvergentni redovi stoga ne mogu biti redovi s pozitivnim članovima

⇒ LEIBNIZOV KRITERIJ:

↳ vrijedi samo za red s alternirajućim članovima

↳ red konvergira ako je red padajući i ako je zadovoljen nužan uvjet konvergencije

DOKAZ:

$$\underbrace{a_1 - a_2}_{+} + \underbrace{a_3 - a_4}_{+} + \underbrace{a_5 - a_6}_{+} + \dots + \underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{+} + \dots$$

↳ ovo su pozitivne razlike jer je niz padajući

$$a_1 - \underbrace{a_2 + a_3}_{-} - \underbrace{a_4 + a_5}_{-} - a_6 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + \dots$$

↳ stoga je a_1 gornja međa jer od njega uvijek oduzimamo neki broj

↳ formalan dokaz vidi u knjižici

ZAD: 22

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$; $\ln n < n \quad / \ln$

$\ln(\ln n) < \ln n < n$

$\frac{1}{\ln(\ln n)} > \frac{1}{n}$

↳ $\sum \frac{1}{n}$ divergira, pa divergira i $\sum \frac{1}{\ln(\ln n)}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{n^2+1}$

$\cos n\pi = (-1)^n \Rightarrow$ zapamti !!!

↳ <u>apsolutna konvergencija:</u>

$\sum \frac{n}{n^2+1}$; $\lim_n \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

↳ stoga, red apsolutno divergira

↳ <u>uvjetna konvergencija:</u>

$\lim_n \frac{n}{n^2+1} = \lim_n \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$

$(n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \Rightarrow n^2+n-1>0$

rješi kvadratnu jednadžbu i dobit ćeš da vrijedi za $n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ZAD: 23

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+1}$

↳ vidimo da apsolutno divergira (usporedi sa redom $\frac{1}{\sqrt{n}}$)

↳ uvjetna konvergencija:

$$\lim_n \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim_n \frac{n}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \lim_n \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\left(0 <\right) \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} < \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad \Big/^2$$

smijemo kvadrirat

$$\frac{n+1}{(n+2)^2} < \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$(n+1)^3 < n(n^2+4n+4)$$

$$\vdots$$

↳ dalje je analogno prošlom raclatku

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$

↳ <u>apsolutna konvergencija:</u>

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \\ x = e^t \end{matrix} \right| = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{t}{e^t}\,dt =$$

$$= \int_{\ln 2}^{\infty} t\,e^{-t}\,dt = \left| \begin{matrix} u = t & v = e^{-t} \\ du = dt & dv = -e^{-t}\,dt \end{matrix} \right| =$$

$$= -t\,e^{-t}\Big|_{\ln 2}^{\infty} - \int_{\ln 2}^{\infty} (-e^{-t})\,dt = -t\,e^{-t}\Big|_{\ln 2}^{\infty} + \int_{\ln 2}^{\infty} e^{-t}\,dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-b \cdot e^{-b} + \ln 2 \cdot e^{-\ln 2} - e^{-b} + e^{-\ln 2} \right] =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$$

↳ niz je apsolutno konvergentan, pa ne moram provjeravat je li uvjetno konvergentan

PR: 23

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$|a_n| = \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_n \frac{|x|}{|n+1|} = 0$$

↳ vidimo da ovaj red apsolutno konvergira

REDOVI POTENCIJA

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n$$

↳ ovo smo radili Cauchyjevom definicijom za množenje redova

⇒ Želja je bila da se sve može opisati pomoću računskih operacija

↳ tu nam pomaže Taylorov red

PR: 1 $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n} \right| = \lim_n \left| \frac{x-1}{1} \right| = |x-1|$$

↳ po D'Alembertu znamo da je ovaj limes manji od 1:

$$|x-1| < 1$$

$$d(x, 1) < 1$$

$$0 < x < 2$$

→ za $x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$ red divergira, za $x = 0$, ili $x = 2$ nema odluke, a za $x \in \langle 0, 2 \rangle$ red konvergira

⇒ vidimo da svaki red potencija ima barem jedan „x" za koji red konvergira:

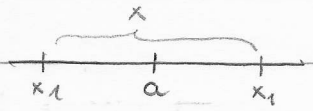
↳ za red $\sum_{n=1}^{\infty} (x-a)^n$ red sigurno konvergira za $x=a$

⇒ pretpostavljamo da je područje konvergencije uvijek simetrično oko točke oko koje ispitujemo

↳ asimetričnost je moguća samo na rubovima

LEMA 1: Ako red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ konvergira u točki x_1, tada on konvergira apsolutno za svaki x za koji vrijedi $|x-a| < |x_1-a|$

⇒ DOKAZ:



$$|x-a| < |x_1-a| \quad / \; ^n$$

$$|x-a|^n < |x_1-a|^n \quad / \cdot |c_n|$$

$$|c_n (x-a)^n| < |c_n (x_1-a)^n|$$

ZAD: 6

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n$

↳ primjenimo Cauchyja:

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^n \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{|-1|^n \, |x+1|^n}{|n|}} =$$

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{|x+1|^n}{|n|}} = \lim_n \frac{|x+1|}{\sqrt[n]{n}} = |x+1| \cdot \underbrace{\lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{=1}$$

$$= |x+1|$$

↳ po Cauchyju, ovaj limes treba biti manji od jedan:

$$|x+1| < 1$$

$$D = \langle -2, 0 \rangle \Rightarrow R = 1$$

↳ ispitajmo rubove granice intervala:

$x = -2$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-2+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

↓ divergira

$x = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

↳ konvergira

⇒ primijetimo:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|\,|x-c|^n} =$$

$$= |x-c| \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

↳ označimo: $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = B$

↳ po Cauchyjevom uvjetu konvergencije:

$$|x-c| \cdot B < 1 \quad / : B \qquad (B > 0)$$

$$|x-c| < \frac{1}{B}$$

↳ vidimo da je polumjer konvergencije:

$$R = \frac{1}{B}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

↳ polumjer područja konvergencije kada primjenjujemo Cauchyjev teorem

↳ slična formula je kada primjenimo D'Alemberta

ZAD. 7

4) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^2}$; $c = 0$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_n \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^2}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_n \frac{1}{\sqrt[n]{n(\ln n)^2}}} = \lim_n \sqrt[n]{n} \cdot \left(\sqrt[n]{\ln n}\right)^2$$

$$0 < \ln n < n \quad / \sqrt[n]{}$$

$$0 < \sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$$

$$1 \leq \lim_n \sqrt[n]{\ln n} \leq \underbrace{\lim_n \sqrt[n]{n}}_{=1}$$

$$\lim_n \sqrt[n]{\ln n} = 1$$

$$R = \lim_n \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\ln n} = 1 \cdot 1 = 1$$

$c = 0$, pa je područje konvergencije $\langle -1, 1 \rangle$

↳ ostaje nam još ispitati rubove što nije teško te dobijemo područje konvergencije

$$[-1, 1]$$

ZAD: 8

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot x^{2n+1}$

↳ trebamo gledat samo članove koji postoje

$$\lim_n \left| \frac{\frac{(-1)^n \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}}{\frac{(-1)^n \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}} \right| = \lim_n \frac{\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}}{\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}} =$$

$$= \lim_n \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

$$K \equiv D \supseteq \langle -2, 2 \rangle \quad ; \quad R = 2$$

↳ ispitajmo rubove:

a) $x = -2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)} (-2)^{2n+1}$$

$$\lim_n \left| \frac{\frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)} (-1)^{2n+3} \cdot 2^{2n+3}}{\frac{(-1)^{n+1} \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)} (-1)^{2n+1} \cdot 2^{2n+1}} \right| = \lim_n \frac{\frac{n+1}{2n+1} \cdot 2^2}{1} = 2 > 1$$

za $x = -2$ red divergira pa ova granica nije uključena

↳ sada još ispitaj za $x = 2$

TAYLOROV RED ELEMENTARNIH FUNKCIJA

⇒ **Taylorov polinom** je polinom koji se s funkcijom podudara u jednoj zadanoj točki i u svim zadanim derivacijama

⇒ Taylorov red svakoj funkciji može pridružiti red za svaki „x" :

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

↳ za $x = 1$:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = e$$

⇒ ZA HIPERBOLNE FUNKCIJE:

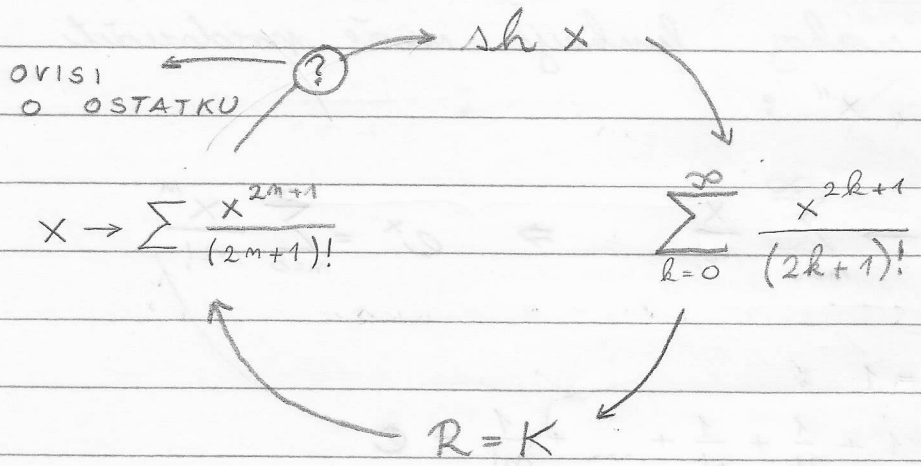
$$sh'x = ch\,x$$
$$\underline{ch'x = sh\,x}$$

$$sh^{(n)}(0) = \begin{cases} ch(0) \ ; & n \to \text{neparan} \\ sh(0) \ ; & n \to \text{paran} \end{cases} = \begin{cases} 1 \ ; & \text{„}n\text{" je neparan} \\ 0 \ ; & \text{„}n\text{" je paran} \end{cases}$$

$$T_\infty(\operatorname{sh} x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k'+1)!} \cdot x^{2k'+1}$$

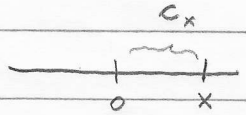
↳ možemo naš put prikazat ovako:



$R_{n+1}(\operatorname{sh} x, 0)$ ⇒ ostatak Taylorova polinoma

$$R_{n+1}(\operatorname{sh} x, 0) = \frac{|x-0|^{2n+3}}{(2n+3)!} f^{(2n+3)}(c_x)$$

$$= \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \operatorname{ch}(c_x)$$



↳ c_x je negdje između 0 i x, pa je $\operatorname{ch}(c_x)$ isto omeđen, pa ostatak teži k nuli

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \pm \frac{x^n}{n!} +$$

↳ ovisno o parnosti broja „n"

↳ sada možemo izvesti formulu za kosinus hiperbolni jer znamo da ova gornja dva reda konvergiraju i znamo im limese :

$$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

↳ vidimo da se neparne potencije u brojniku krate

⇒ NEPARNE FUNKCIJE :

↳ sastoje se samo od neparnih potencija u Taylorovom redu

↳ naravno, kosinus hiperbolni smo također mogli izvest na klasičan način (kao i sinus hiperbolni) proširavanjem ostatka Taylorovog polinoma

⇒ primjetimo da je e^x zapravo „najvažnija" funkcija jer se sve ostale funkcije mogu izvesti iz nje pomoću Taylorovog reda

⇒ ZA LOGARITAMSKE FUNKCIJE:

↳ pošto $\ln x$ nije definiran u ishodištu ($x=0$), mi ćemo pomaknuti funkciju za jedan u lijevo:

$$f(1+x) = ?$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'''(x) = \frac{1}{(1+x)^3} \cdot 2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

↳ iz ovoga lagano izvedemo Taylorov red:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}}$$

↳ $R = 1$

↳ treba još provjeriti granice (vidimo da je granica divergentna za $x=1$, a konvergentna za $x=-1$)

ZAD: Nadite Mac Laurinov red za arctg x !

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \Big/ \int$$

$$\downarrow$$

$$q$$

$$f(x) + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n+1} = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

↳ ako želimo dobiti C, uvrstimo $x=0$:

$$\operatorname{arctg} 0 + C = 0$$

$$C = 0$$

↳ time smo dokazali da arctg x možemo prikazati na način prikazan gore

⇒ dobro za pamtiti:

$$\int \sum = \sum \int$$ ⇒ komutacija integrala i beskonačne sume

$$\left(\sum\right)' = \sum (\ )'$$ ⇒ komutacija derivacije i beskonačne sume

ZAD. 12

1) $f(x) = e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n$

$K = R$

2) $f(x) = e^{1-x} = e \cdot e^{-x} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e\,(-1)^n}{n!} x^n$

3) $f(x) = x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

4) $f(x) = \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$

5) $f(x) = \sin \pi x = \Big/ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \Big/ =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

6) $\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \Big/ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \Big/ = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} x^n$

ZAD: 13

1) $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $c = 1$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+(x-1)+1} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \left| q = -\frac{x-1}{2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

$$-1 < -\frac{x-1}{2} < 1 \quad / \cdot (-2)$$

$$2 > x-1 > -2 \quad / +1$$

$$3 > x > -1 \quad \Rightarrow K = \langle -1, 3 \rangle$$

5) $f(x) = \sin \pi x$; $c = \frac{1}{2}$

$$\sin \pi x = \sin\left[\pi\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[\pi\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \cos\left[-\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left[\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} \left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

ZAD: 14

5) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^0 x^0}{0!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

9) $\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3\left(1-\frac{x^2}{3}\right)}} = \left(3\left(1-\frac{x^2}{3}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\left(-\frac{x^2}{3}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$= \Big/ (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n \quad R=1 \Big/ = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{3^n} x^{2n}$

$-1 < -\frac{x^2}{3} < 1 \quad / \cdot (-3)$

$3 > x^2 > -3 \Rightarrow x^2 < 3$

$x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$

ZAD: Razvij u Taylorov red po potencijama $x+2$ funkciju $\frac{1}{x^2+4x+7}$ ∇

$$\frac{1}{(x+2)^2+3} = \frac{1}{3-(-(x+2)^2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{(x+2)^2}{3}\right)}_{q}} = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(x+2)^2}{3}\right]^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x+2)^{2n}$$

↳ provjetimo da je diskriminanta polinoma u nazivniku negativna što znači da ne možemo rastaviti na parcijalne razlomke

—

ZAD: Razvij u Taylorov red po potencijama $x+4$ funkciju $\frac{1}{x^2+3x+2}$ ∇

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} = \frac{A}{1+(x+4)-4}+\frac{B}{(x+4)-4+2} =$$

$$= -\frac{A}{3-(x+4)} - \frac{B}{2-(x+4)} = -\frac{1}{3}\frac{A}{1-\frac{x+4}{3}} - \frac{1}{2}\frac{B}{1-\frac{x+4}{2}} = \dots$$

↳ dalje izvedemo analogno prošlom primjeru (NAPOMENA: područje konvergencije je presjek od područja od oba razlomka)

↳ odredi i A i B ! BITNO !

ZAD: Primjenivši deriviranje i integriranje član po član, odredi sumu reda:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1} + \ldots\ldots = f(x)$$

↗ želimo se riješiti svega kako bi došli do geometrijskog reda, pa onda integrirati

$$1 + 2x + 2\cdot 3\frac{x^2}{2} + 3\cdot 4\frac{x^3}{3} + \ldots + n(n+1)\frac{x^n}{n} + \ldots = \int\int f(x)\,dx$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots = \int f(x)\,dx \quad / \int$$

$$x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n+1} + \ldots = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx$$

$$x^2\left(1 + x + x^2 + x^{n-1} + x^n + \ldots\right) = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx$$

$$\frac{x^2}{1-x} = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx \quad / '$$

$$\frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \int f(x)\,dx$$

$$\frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = \int f(x)\,dx \quad / '$$

$$\vdots$$

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

ZAD: Primjenom deriviranje i integriranje član po član, odredi sumu reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} = ?$$

↳ trebamo prepoznati da je ova suma nekog Taylorovog reda u nekoj točki

↳ krenimo od geometrijskog reda:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad / '$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \dots + (-1)^n n x^{n-1} + \dots \quad / \cdot x$$

$$-\frac{x}{(1+x)^2} = -x + 2x^2 - 3x^3 + \dots + (-1)^n n x^n + \dots \quad / '$$

↳ množili smo s „x" kako bi dobili „n^2" u općem članu (primjet da to imamo u polarnoj nizu)

$$-\frac{1(1+x)^2 - 2(1+x)x}{(1+x)^4} = -1 + 4x - 9x^2 + \dots + (-1)^n n^2 x^{n-1} + \dots \quad / \cdot x$$

$$-\frac{x(1+2x+x^2-2x-2x^2)}{(1+x)^4} = -x + 4x^2 - 9x^3 + \dots + (-1)^n n^2 x^n + \dots \quad / \; x = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{2}{27} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE - UVOD

$f'(x) \equiv y'$ ⇒ brzina promjene veličine

$f''(x) \equiv y''$ ⇒ akceleracija promjene veličine

⇒ diferencijalna jednadžba „n" - tog stupnja:

$$F(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

↳ „n" govori da trebamo „n" puta integrirati, pa imamo „n" konstanti

↳ mi težimo jedinstvenom rješenju jer ona imaju primjenu (veliku) u stvarnom životu (npr. simulator aviona u 3D-u mora neprestano rješavati 17 diferencijalnih jednadžbi)

↳ ako želimo jedinstvena rješenja, trebamo početne uvjete:

$$y = y_0$$

$$y' = y_1$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = y_{n-1}$$

↳ diferencijalne jednadžbe nemaju jedinstven način rješavanja

⇒ Cauchyjeva zadaća:

↳ „Ne možemo rješiti sve, ali ajmo vidjeti što možemo"

↳ eksplicitna je mogućе izraziti najvišu derivaciju:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

↳ naravno, trebamo i početne uvjete:

$$y(x_0) = y_0 \; ; \quad y'(x_0) = y_1 \; ; \quad y''(x_0) = y_2$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

⇒ mi se ne bavimo diferencijalnim jednadžbama viših stupnjeva, već samo prvog stupnja, pa Cauchyjeva zadaća za $n=1$ glasi:

$$y' = f(x, y)$$

↳ imamo samo jednu konstantu jer za rješavanje ove jednadžbe trebamo samo jednom integrirati, pa trebamo samo jedan početni uvjet:

$$y(x_0) = y_0$$

⇒ mi ćemo se koristi točna odredbenim metodama rješavanja

⇒ NAPOMENA:

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y) \cdot dx$$

$$f(x, y)\,dx - 1\,dy = 0 \quad / \; u(x, y)$$

$$\boxed{u(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy = 0}$$

↳ drugi način zapisa diferencijalne jednadžbe

⇒ IZOKLINE:

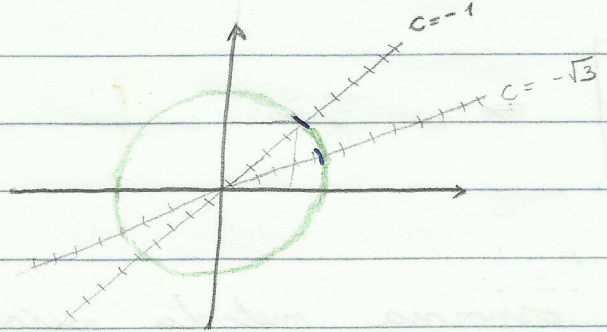
↳ crte koje povezuju točke u kojima je derivacija ista

↳ pomoću njih dobivamo cor rješenja diferencijalne jednadžbe

PR: Rješi diferencijalnu jednadžbu: $y' = -\frac{x}{y}$

$T_0(1, 1) \Rightarrow y' = -1$

↳ krenuma sada otkrit sve točke u kojima je derivacija ista jednaka -1



$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow -\frac{x}{y} = -\sqrt{3}$

↳ primjetimo: $x^2 + y^2 = r^2 \;/'$

$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

JEDNADŽBE SA SEPARIRANIM VARIJABLAMA

$y' = f(x, y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow dy = f(x, y)\,dx$; $g_1(x)$; $g_2(x)$

$$\boxed{\frac{dy}{g_2(y)} = g_1(x)\,dx} \Rightarrow$$

⇒ separacija varijabli je osnovna metoda rješavanja diferencijalnih jednadžbi

ZAD: Riješi diferencijalnu jednadžbu:

$(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$

$(1+y^2)\,dx = -(1+x^2)\,dy$

$-\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2} \quad / \int$

$-\operatorname{arctg} x + C = \operatorname{arctg} y$

$y = \operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x + C)$

$y = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x - C)$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha + tg\,\beta}$$

↳ proizlazi iz gornje formule:

$$y = -\frac{x - tg\,C}{1 + x\,tg\,C}$$ KONSTANTE

$$y = -\frac{x - C}{1 + Cx}$$

ZAD: Riješi diferencijalnu jednadžbu: $y' = (x+y)^2$

↳ ovo ne možemo separirati, ali je $f(x,y) = (x+y)^2$ je linearni polinom

↳ krenimo rješavati supstitucijom:

$$z = x + y \quad /'$$

$$z' = 1 + y' \quad \Rightarrow y' = z' - 1$$

$$z' - 1 = z^2$$

$$z' = 1 + z^2$$

$$\frac{z'}{1+z^2} = 1 \quad / \int dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx$$

$$arctg\, z = x + C \quad \Rightarrow z = tg(x + C)$$

$$x + y = tg(x + C)$$

$$y = tg(x + C) - x$$

⇒ NAPOMENA:

↳ vrano uz prosli zadatak:

$$y' = \varphi(ax + by + c) \quad \rightarrow \text{linearni polinom}$$

$$z = ax + by + c$$

$$z' = a + by' \quad \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$$

$$\frac{z' - a}{b} = \varphi(z)$$

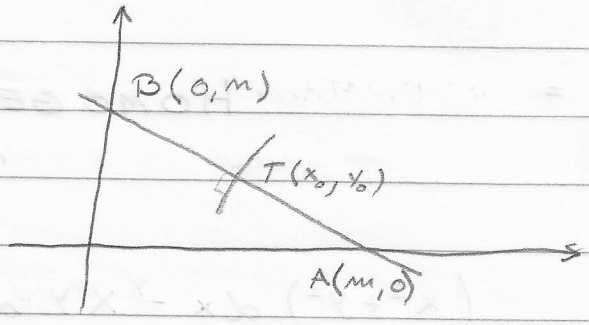
$$z' = a + b\varphi(z)$$

$$\frac{z'}{a + b\varphi(z)} = 1$$

↳ ovo je pojačenje jednog postupka rješavanja

PR. 17

$$y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$



↳ uvrstimo točku A:

$$0 - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)}(m - x_0)$$

$$P \equiv T\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$$

x_0 y_0

↳ uvrstimo točku B:

$$m = y_0 + \frac{x_0}{y'(x_0)}$$

⇒ iz gornjega proizlazi:

$$x_0 = \frac{x_0 + y_0 y'(x_0)}{2} \qquad y_0 = \frac{y_0 + \frac{x_0}{y'(x_0)}}{2}$$

⇒ stoga imamo dvije diferencijalne jednadžbe:

$$x = \frac{x + y y'}{2} \qquad y = \frac{y + \frac{x}{y'}}{2}$$

$$2x - x - y y' = 0 \qquad 2y - y - \frac{x}{y'} = 0 \;/\cdot y'$$

$$x = y y' \;/\int \qquad y y' = x$$

$$\frac{x^2}{2} + C = \frac{y^2}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = K}$$

↳ ovo je jednadžba hiperbole

HOMOGENE JEDNADŽBE

$$(x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$$

↳ načinimo supstituciju: $z = \frac{y}{x}$

$$x z = y \quad / \,'$$

$$z + x z' = y' \Rightarrow x z' = y' - z$$

⇒ napomena: ovo je vrlo čest postupak i trebala bi zapamtiti supstituciju: $z = \frac{y}{x}$ što daje $y' = z + x z'$ //

↳ iz početne jednadžbe slijedi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$z + x z' = \frac{1}{z} + z$$

↗ primjet da smo dobili separaciju varijabli

$$x z' = \frac{1}{z} \Rightarrow z z' = \frac{1}{x} \quad / \int$$

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C$$

$$\vdots$$

$$C x^2 - y^2 = x^2 \ln x^2$$

ZADATAK 7

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x-y}$

$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \quad y = xz \quad \Rightarrow \quad y' = xz' + z$

↳ vratimo se u jednadžbu:

$$xz' + z = \frac{2x + xz}{x - xz}$$

$$xz' + z = \frac{2+z}{1-z}$$

$$xz' = \frac{2+z}{1-z} - z$$

$$xz' = \frac{2+z-z(1-z)}{1-z}$$

$$xz' = \frac{2+z^2}{1-z}$$

→ varijable su sada separirane

$$\frac{1-z}{2+z^2}\,dz = \frac{1}{x}\,dx \quad / \int$$

$$\int \frac{1-z}{2-z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dz}{2+z^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2z}{2+z^2}\,dz = \ln|Cx|$$

↳ riješi sam do kraja !

⇒ NAPOMENA:

↳ možemo raključit da sve jednadžbe oblika:

$y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ možemo riješit pomoću supstitucije $z = \frac{y}{x}$

(PR: 25) $(2x - y + 4)\,dy + (x - 2y + 5)\,dx = 0$

$$y' = -\frac{x - 2y + 5}{2x - y + 4}$$

→ ovi smetaju za primjenu supstitucije $z = \frac{x}{x}$

↳ sada pokušajmo ukloniti ova dva nepoželjna pribrojnika:

↳ pokažimo ovo na primjeru:

$$7x - 4 = \underbrace{\left[7(x - 2) + 4\right]}_{7x} - 4$$

↳ primjer: $2 = \frac{4}{7}$

↳ kako bi našli rješenje za naš brojnik i nazivnik trebamo riješit sustav:

$$x - 2y + 5 = 0$$
$$2x - y + 4 = 0$$

$$x_0 = -1$$
$$y_0 = 2$$

} nultočke

↳ sada napišimo:

$x = u + x_0 = u - 1 \quad \Rightarrow dx = du$

$y = v + y_0 = v + 2 \quad \Rightarrow dy = dv$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{(u-1)-2(v+2)+5}{2(u-1)-(v+2)+4}$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u-2v}{2u-v}$$

↳ vidimo da je ovo homogena jednadžba, pa je sada rješimo na isti način kao i ostale (supstitucija $z = \frac{y}{x}$)

PR: 26 $\quad y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$

↳ ako idemo postupkom kao u prošlom primjeru, dobit ćemo da sustav nema rješenja („pravci" su paralelni)

↳ stoga, trebamo drugi način:

$$z = x + 2y \quad / \, ' dx$$

$$z' = 1 + 2y' \Rightarrow 2y' = z' - 1$$

$$y' = \frac{z'-1}{2}$$

$$\frac{z'-1}{2} = \frac{z+1}{2z+3}$$

$$\vdots$$

$$z' = \frac{4z+5}{2z+3}$$

$$\frac{4z+5}{2z+3}\,dz = dx \quad / \int$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{4z+5+1}{4x+5}\,dz = x + C$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{4z+5}\right) dz = x + C$$

↳ riješi integral i vrati supstituciju

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

⇒ struktura linearne diferencijalne jednadžbe:

$$\boxed{a(x)\,y^{(1)}(x) + b(x)\,y^{(0)}(x) = c(x)} \quad / : a(x)$$

↳ normiran oblik:

$$y^{(1)}(x) + \frac{b(x)}{a(x)}\,y^{(0)}(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

$\frac{b(x)}{a(x)} \to p(x)$, $\frac{c(x)}{a(x)} \to q(x)$

$$\boxed{y^{(1)}(x) + p(x)\,y = q(x)}$$

↳ normiran oblik ćemo mi mnogo češće koristiti od standardnog oblika

⇒ linearne jednadžbe (diferencijalne) rješavaju se svođenjem na pripadnu homogenu:

$$y' + p(x)\cdot y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \quad / \int \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln y = -\int p(x)\,dx}$$

↳ ako sada izrazimo Y:

$$Y = e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-P(x)+C}$$

$$Y = C(x)\cdot e^{-P(x)}$$

↳ ako sada deriviramo:

$$Y' = C'(x)\,e^{-\int p(x)dx} + C(x)\,e^{-\int p(x)dx}(-p(x))$$

$$Y' = C'(x)\,e^{-\int p(x)dx} - p(x)\,C(x)\,e^{-\int p(x)dx}$$

↳ znamo da ovo gore dobivno mora zadovoljavati normirani oblik linearne diferencijalne jednadžbe:

$$C'(x)\,e^{-\int p(x)dx} - p(x)\,C(x)\,e^{-\int p(x)dx} + p(x)\,C(x)\,e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$q(x) = C'(x)\,e^{-\int p(x)dx} \quad \Big/ \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$C'(x) = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \quad \Big/ \int dx$$

$$C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + C$$

↳ vidimo da je stoga rješenje jednadžbe

$$Y = \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

↳ ako to rješenje napišemo u obliku:

$$y = \underbrace{C e^{-\int p(x)dx}}_{y_H} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx}_{y_p}$$

$$\boxed{y = y_H + y_p}$$

$y_H \rightarrow$ rješenje homogene jednadžbe koja pripada zadanoj linearnoj

$y_p \rightarrow$ partikularno rješenje početne jednadžbe

PR: 29 Ryeši diferencijalnu jednadžbu $y' - \frac{y}{x} = x^2$

↳ rješimo prvo homogenu: $y' - \frac{y}{x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\boxed{y = Cx}$$

↳ sada tražimo partikularno rješenje, uz pomoć rješenja homogene (s tim da je i konstanta C funkcija po varijabli „x" ($C(x)$)):

$$C' \cdot x + C - C = x^2 \Rightarrow C' = x \;/\int \Rightarrow C = \frac{x^2}{2} + K$$

↳ stoga je rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + K\right) x = \frac{x^3}{2} + Kx$$

ZAD: 3

1) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$

$p(x) = -\frac{1}{x}$; $q(x) = x \sin x$

$y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C$

$\ln|y| - \ln|x| = C$

$\ln \frac{y}{x} = C$

$y = xC$

$y = Cx$

$e^C = \frac{y}{x}$

↳ nadimo sada partikularno rješenje:

$y = C(x) \cdot x$

$C'(x)\,x + C(x) - C(x) = x \sin x$

$C'(x) = \sin x \quad / \int dx$

kratimo se u svakom zadatku 8

$C(x) = -\cos x + K$

$\rightarrow y_p = -\cos x$

↳ rješenje diferencijalne jednadžbe je stoga:

$y = (-\cos x + K) \cdot x$

$y = Kx - x\cos x$

3) $dx + (e^y - x)\,dy = 0 \quad / : dx$

$y'(e^y - x) + 1 = 0 \quad / : (e^y - x)$

$y' + \frac{1}{e^y - x} = 0 \Rightarrow$ ne znamo što je jer nismo uspjeli dobit linearnu jednadžbu

↳ pokušajmo ovako:

$\frac{dx}{dy} + e^y - x = 0$

$x' - x = -e^y \Rightarrow$ vidimo da je ovo opet linearna diferencijalna jednadžba po x

↳ rješimo homogenu:

$\frac{dx}{dy} - x = 0$

$\frac{dx}{x} = dy \quad / \int$

$\ln x = y + C$

$x = e^y \cdot C$

$x_H = e^y \cdot C$

↳ nadimo sada partikularno rješenje:

$x_p = C(y) \cdot e^y$

$x' = C'(y)e^y + C(y)e^y$

$C'(y)e^y + C(y)e^y - C(y)\cdot e^y = -e^y$

$C'(y)e^y = -e^y$

$C'(y) = -1 \quad / \int dy$

$C(y) = -y$

$x(y) = C \cdot e^y + (-y)\cdot e^y$

$x(y) = e^y(C - y)$

2) $y = xy' + y' \ln y$

$y = y'(x + \ln y) \Rightarrow y' = \frac{y}{x + \ln y}$ → nije moguće supstituirat nit separirat varijable

↳ pokušajmo svest na linearnu:

$y' - \frac{1}{x + \ln y} y' = 0$ → vidimo da nije linearna po „y"

↳ pokušajmo svesti na linearnu po „x":

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \ln y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x + \ln y}{y}$

$\frac{dx}{dy} - x \cdot \frac{1}{y} = \frac{\ln y}{y}$ → $q(y)$; $p(y)$

↳ rješimo homogenu:

$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$

$\ln x = \ln Cy$

$x = Cy$

↳ rješimo partikularno:

$x_p = C(y) \cdot y$

$x' = C'(y) \cdot y + C(y)$

$C'(y) \cdot y + C(y) - C(y) = \frac{\ln y}{y}$

$C'(y) = \frac{\ln y}{y^2} \quad / \int dy$

$\int \frac{\ln y}{y^2} dy = \left| \begin{matrix} \ln y = t \\ \frac{1}{y} dy = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t}{e^t} dt = \int t e^{-t} dt = \left| \begin{matrix} u = t & dv = e^{-t} dt \\ du = dt & v = -e^{-t} \end{matrix} \right| =$

$= -e^{-t} \cdot t + \int e^{-t} dt = -e^{-t} \cdot t - e^{-t} = -\frac{1}{y}(\ln y + 1)$

↳ sada samo vratimo homogeno i partikularno rješenje

4) $(x+1)(yy'-1) = y^2$

$(x+1)\,yy' - x - 1 = y^2 \quad / : y(x+1)$

$$y' - \frac{(x+1)}{x+1}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y^2}{y(x+1)}$$

$$y' - \frac{1}{y} = \frac{y}{x+1}$$

↳ forsiramo linearni zapis na lijevoj strani:

$$y' - \frac{1}{x+1}\,y = y^{-1}$$

↳ ovo je Bernoullijeva jednadžba čiji opći oblik izgleda ovako:

$$\boxed{y' + p(x)\,y = q(x)\cdot y^n} \qquad n \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

↳ Bernoullijeve jednadžbe rješavaju se supstitucijom $z = y^{1-n}$, pa se dobije linearna diferencijalna jednadžba

↳ krenimo svesti na linearnu jednadžbu:

$$z = y^2 \;/\,' \quad \Rightarrow \quad z' = 2yy' \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{2} = yy'$$

$$yy' - \frac{1}{x+1}\,y^2 = 1$$

$$\frac{z'}{2} - \frac{1}{x+1}\,z = 1 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{2}{x+1}\,z = 2$$

↳ sada imamo linearnu diferencijalnu jednadžbu

⇒ općenita Bernoullijeva jednadžba ($n=2$):

$$y' + p(x)\,y = q(x)\cdot y^2 \quad /:y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} + p(x)\cdot\frac{y}{y^2} = q(x)$$

ovo je naša supstitucija:

$$z = \frac{1}{y}$$

$$z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{1}{y^2}\cdot y'$$

$$-z' + p(x)\cdot z = q(x)$$

$$z' - p(x)\cdot z = -q(x)$$ ⇒ ovo je sada

linearna diferencijalna jednadžba

ORTOGONALNE I IZOGONALNE TRAJEKTORIJE

⇒ često se pojavljuju problemi sjecišta dvaju familija i kuta pod kojim se one sjeku

↳ npr. imamo radanu familiju krivulja, a mi trebamo naći familiju koja sječe radanu familiju pod radanim kutem

↳ kako bi rješili ovaj problem, od radane familije trebamo načiniti diferencijalnu jednadžbu (najbolje u obliku Cauchyjeve radaće)

↳ još trebamo promijeniti činjenicu da je kut između krivulja u nekoj točki jednak kutu između tangenata na krivulje u toj točki

ZAD: 19) $y^2 = 4ax$ / $'$

$2yy' = 4a$ } ovo tretiramo kao sustav (tako od familije dobijemo diferencijalnu jednadžbu)

$y^2 = 2yy'x$

$y' = \frac{y^2}{2yx} \Rightarrow y' = \frac{y}{2x}$

↳ još imamo rečeno da je $\alpha = 45°$

$tg\,\alpha = tg\,45° = 1 = \frac{y_1' - y_2'}{1 - y_1' y_2'}$

$1 + \underbrace{y_1'}_{\frac{y}{2x}} y_2' = \underbrace{y_1'}_{\frac{y}{2x}} - y_2'$

$1 + \frac{y}{2x} y_2' = \frac{y}{2x} - y_2'$

$y_2' \left(\frac{y}{2x} + 1\right) = \frac{y}{2x} - 1$

$y_2' = \frac{\frac{y}{2x} - 1}{\frac{y}{2x} + 1}$

↳ sada imamo diferencijalnu jednadžbu te ju trela rješit:

$y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} - 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} + 1}$

↳ uvodimo supstituciju $z = \frac{y}{x}$ jer je ovo homogena jednadžba:

$y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot z - 1}{\frac{1}{2} z + 1}$

OKRENI →

$$y = xz \qquad y' = z + xz'$$

$$z + xz' = \frac{\frac{1}{2}z - 1}{\frac{1}{2}z + 1}$$

$$xz' = \frac{z - 2 - z(z+2)}{z+2}$$

$$\frac{z+2}{-z^2-z-2}\,dz = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$-\int \frac{z+2}{z^2+z+2}\,dz = \ln x + C$$

samo treba riješit ovaj integral i zadatak je riješen

ZAD: 17

$y = \operatorname{arc\,ctg}(cx) \quad /'$

$y' = \frac{-1}{1+(cx)^2} \cdot c$

$-y' = \frac{c}{1+c^2x^2} \Rightarrow -(1+c^2x^2)\,y' = -c$

$x^2 y c^2 + c + y = 0$

↓

želja nam je dobiti c, ali ovdje imamo kvadratnu jednadžbu po c, pa pokušamo c izraziti iz prve jednadžbe

$\operatorname{ctg} y = cx \Rightarrow c = \frac{\operatorname{ctg} y}{x}$

$-y' = \frac{\frac{\operatorname{ctg} y}{x}}{1+\operatorname{ctg}^2 y} \Rightarrow y' = -\frac{\operatorname{ctg} y}{x(1+\operatorname{ctg}^2 y)}$

↳ koristimo činjenicu da je $y_2' \perp y_1'$ ∇

$y_1' \cdot y_2' = -1$

$-\frac{\operatorname{ctg} y}{x(1+\operatorname{ctg}^2 y)} \cdot y_2' = -1$

$\frac{\operatorname{ctg} y}{1+\operatorname{ctg}^2 y} \cdot y_2' = x$

↳ sredimo prvi član na lijevoj strani kako bi izbjegli kompleksnost integrala

OKRENI

$$\frac{\operatorname{ctg} y}{1+\operatorname{ctg}^2 y} \cdot y' = x$$

$$\frac{\frac{\cos y}{\sin y}}{1+\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} \cdot y' = x$$

$$\frac{\frac{\cos y}{\sin y}}{\frac{1}{\sin^2 y}} y' = x$$

$$\sin y \cos y \, dy = x \, dx \;/\; \int$$

$$\int \sin y \cos y \, dy = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{\frac{\sin^2 y}{2} = \frac{x^2}{2} + C} \longrightarrow \text{sada odredimo } C$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{2^2}{2} + C$$

$$\frac{1}{2} = 2 + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\sin^2 y}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\sin^2 y = x^2 - 3$$

⇒ NAPOMENA: u većini zadataka traži se okomitost (ortogonalnost), pa možemo jednostavno krenuti od uvjeta $y_1' \cdot y_2' = -1$

EGZAKTNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

$F(x, y, y') = 0$

↳ nije uvijek moguće izraziti y' kao funkciju ove preostale dvije varijable, ali kada je onda to izgleda ovako:

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

↳ takve jednadžbe (gdje se y' na taj način može izraziti) se nazivaju EGZAKTNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

$$y' = f(x, y) \iff M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

⇒ primjetimo da su egzaktne diferencijalne jednadžbe samo mali dijelć ukupnog skupa diferencijalnih jednadžbi, pa trebamo dobar način kojim ćemo ustanoviti je li neka jednadžba egzaktna

↳ tu će nam pomoći Schwarzov teorem

PR: 1 $(3x^2y + 2)\,dx + x^3\,dy = 0$

dy dx

$3x^2$

→ BITNO! - po Schwarzovom teoremu naslućujemo da je ovo egzaktna diferencijalna jednadžba

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y + 2 \quad / \int dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3$$

$$u(x,y) = \int (3x^2y + 2)\,dx$$

$$u(x,y) = x^3y + 2x + C(y)$$

ovo nije broj, već funkcija po varijabli „y"

↳ sada imamo sustav:

$$u(x,y) = x^3y + 2x + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 0 + C'(y)$$

$$x^3 = x^3 + 0 + C'(y)$$

$$C'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y) = \text{konstanta}$$

(bilo koja konstanta, označimo npr. K)

uvijek se kratiti!

ZAD: 1) 6) $\underbrace{\left(\frac{\sin(2x)}{y} + x\right)}_{P} dx + \underbrace{\left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)}_{Q} dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sin(2x) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{\sin(2x)}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2\sin x \cos x}{y^2} = -\frac{\sin(2x)}{y^2}$$

} ovo je jednako, pa je jednadžba egzaktna

↳ postavimo sustav:

↳ znamo da je: $u(x, y) = C$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin(2x)}{y} + x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \quad / \int dy$$

} ovo je naš sustav

$$u(x, y) = \int \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = \frac{y^2}{2} + \sin^2 x \cdot \frac{1}{y} + C(x)$$

konstanta koja može ovisiti o „x" jer deriviramo po „y"

↳ sada se vratimo u drugu jednadžbu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 + \frac{1}{y} 2 \sin x \cos x + C'(x)$$

$$\frac{2\sin x \cos x}{y} + C'(x) = \frac{\sin 2x}{y} + x$$

$$C'(x) = x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + K$$

↳ vratimo se u gornju jednadžbu:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2}{2} + K = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + \frac{2\sin^2 x}{y} + x^2 = K_1$$

⇒ ponovimo koje postupke do sada znamo:

SEPARACIJA

homogena → $\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$

linearna → bernoullijeva

} sve ove se svode na separaciju varijabli

↳ egzaktne diferencijalne jednadžbe se ne svode na separaciju varijabli, pa ih svrstavamo u drugu skupinu

↳ egzaktne diferencijalne jednadžbe imaju i malu podskupinu koje se rješavaju pomoću **Eulerovog multiplikatora**

↳ pomoću tog multiplikatora mi jednadžbu svodimo na egzaktnu

EULEROV MULTIPLIKATOR

⇒ tera koja garant da iako ne vrijedi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, možda se još uvijek (pomoću nekog multiplikatora) jednadžba može svesti na egzaktnu

↳ postoje dva multiplikatora:

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}(P_y' - Q_x')\,dx$$

$$\ln \mu(y) = -\int \frac{1}{P}(P_y' - Q_x')\,dx$$

} ovo bi bilo dobro zapamtiti

⇒ **POSTUPAK:** („šablonski")

↳ izračunaj parcijalne derivacije $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$

↳ izračunaj razliku:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \dots$$

↳ sada tu razliku dijelimo s samim funkcijama P ili Q

↳ pogledamo koj količnik je funkcija samo jedne varijable (ako niji ni jedan, onda ovo ne možemo riješiti - barem ne metodom Eulerovog multiplikatora)

↳ kako bi dobili multiplikator, taj količnik treba integrirati

↳ sada pomnožimo jednadžbu s multiplikatorom i dobijemo egzaktnu diferencijalnu jednadžbu

⇒ NAPOMENA: radaci s Eulerovim multiplikatorom se često pojavljuju u takvom obliku da imamo radani multiplikator, al takav da ovisi o dvije varijable.

↳ tada ne možemo primijeniti „šallow" već treba razumjeti izvod Eulerovog multiplikatora

↳ vidi PRIMJER 7 u knjižici!

ZAD: 2) 5) $x\,dx - (x^2 - e^{2y})\,dy = 0$

$P(x,y) = x \qquad Q(x,y) = -x^2 + e^{2y}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 - (-2x) = 2x$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{2x}{x} = 2$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2x}{-x^2 + e^{2y}}$$

↑ ovaj je puno bolji!

$$\ln \mu(y) = -\int 2\,dy$$

$$\ln \mu(y) = -2y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu(y) = e^{-2y}}$$

↑ naš Eulerov multiplikator

↳ pomnožimo početnu jednadžbu s multiplikatorom:

$$x \cdot e^{-2y}\,dx - \left(x^2 e^{-2y} - 1\right) dy = 0$$

↳ provjerimo je li ova egzaktna diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2x \cdot e^{-2y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\left(2x \cdot e^{-2y}\right)$$

} ove je jednake, pa imamo dobar egzaktnu jednadžbu

↳ rješimo sada egzaktnu jednadžbu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \cdot e^{-2y} \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-2y} + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - x^2 e^{-2y}$$

$$-2\frac{x^2}{2} \cdot e^{-2y} + C'(y) = 1 - x^2 e^{-2y}$$

$$C'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(y) = y + k$$

↳ vratimo se natrag:

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-2y} + y + k$$

$$\frac{x^2}{2} e^{-2y} + y = k$$

11) $y' + \operatorname{tg} x + \frac{e^y}{\cos x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} x + \frac{e^y}{\cos x} = 0$$

$$\left(\operatorname{tg} x + \frac{e^y}{\cos x} \right) dx + dy = 0$$

↳ krenimo na nalaženje multiplikatora:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{e^y}{\cos x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{e^y}{\cos x}}{\operatorname{tg} x + \frac{e^y}{\cos x}} = \frac{e^y}{\sin x + e^y}$$

↳ imamo dvije varijable, pa moramo promijeniti način nalaženja multiplikatora

↳ pokušajmo početnu jednadžbu pomnožiti s $\cos x$:

$$(\sin x + e^y)\, dx + \cos x\, dy = 0$$

↳ krenimo opet u nalaženje multiplikatora:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{e^y + \sin x}{\sin x + e^y} = 1$$

↑ ovo izgleda dobro!

↳ integriramo sada kako bi dobili multiplikator po varijabli „y":

$$\ln \mu(y) = -\int 1 \, dy = -y$$

$$\mu(y) = e^{-y}$$

↳ pomnožimo početnu jednadžbu s multiplikatorom:

$$(\sin x + e^{y})\,dx + \cos x \, dy = 0 \quad / \cdot e^{-y}$$

$$(\sin(x) \cdot e^{-y} + 1)\,dy + \cos(x) \cdot e^{-y}\, dy = 0$$

↳ sada možemo provjeriti da je ovo egzaktna diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sin(x) \cdot e^{-y} \cdot (-1.)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{-y} \cdot (-\sin(x))$$

} ovo je jednako

⇒ iz ovog zadatka možemo zaključiti da situacija nije uvijek tako čista – može se desit da prvo trebamo malo srediti diferencijalnu jednadžbu, a tek onda krenut u nalaženje Eulerovog multiplikatora

↳ teži zadac od ovoga se neki trebali pojavit

TRAŽENJE RJEŠENJA U PARAMETARSKOM OBLIKU

⇒ sada više nećemo imati jednadžbu radanu kao Cauchyjevu radaću, već se može desiti da je derivacija (y') argument neke funkcije

↳ u takvim slučajevima trebamo izvršiti parametrizaciju

⇒ drugim riječima, y' ne možemo eksplicitno izvrazit kao funkciju preostalih varijabli (u našem slučaju to su „x" i „y")

$$F(x, y, y') = 0$$

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \Psi(u, v) \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$$

$$F\left(\varphi(u,v),\ \Psi(u,v),\ \chi(u,v)\right) = 0$$

⇒ Leibnitz je „davno" uveo notaciju: $y' = \frac{dy}{dx}$

$$dy = y'\,dx$$

$$d\Psi(u,v) \qquad \chi(u,v) \qquad d\varphi(u,v)$$

⇒ mi znamo računati diferencijale funkcija dviju varijabla:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u}du + \frac{\partial \Psi}{\partial v}dv = \chi(u,v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right)$$

⇒ najveći problem traženja rješenja u parametarskom obliku je teška parametrizacija - toliko je teška u nekim slučajevima da se jednadžbe proglase nemogućim za parametrizirat

↳ stoga, mi ćemo se bretat samutar četri vrlo jednostavnih slučajeva parametrizacije

1. SLUČAJ: jednadžba oblika $y = f(x, y')$

$$x = \varphi(u,v) \equiv x$$
$$y = \Psi(u,v) \equiv f(x, y')$$
$$y' = \chi(u,v) \equiv (p)$$

→ oznaka ključ jednostavnosti

↳ naša parametrizacija tada izgleda:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv x \\ y &\equiv f(x,p) \\ y' &\equiv p \end{aligned}\right\}$$ ovo sada samo treba raspisat po glavnoj formuli (na vrhu stranice)

PR: 8 $y = y'^2 - y'x + \frac{1}{2}x^2$

↳ parametrizacija: $x = x$

$y' = p$

$y = p^2 - xp + \frac{1}{2}x^2$

$dy = p\,dx$

$(-p + x)\,dx + (2p - x)\,dp = p\,dx$

$(2p - x)\,dp = (p + p - x)\,dx \quad / : (2p - x)$

$\frac{dp}{dx} = \frac{2p - x}{2p - x} = 1$

↳ imamo dva rješenja:

$\frac{dp}{dx} = 1$

ovo rješenje je nešto bitnije i ono nas navodi na rješenje diferencijalne jednadžbe

$2p - x = 0$

jer smo s time dijelili

$p = x + C \Rightarrow$ ovime se vraćamo u diferencijalnu jednadžbu kako bi se riješili parametra „p"

$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{1}{2}x^2 = \ldots = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$

↳ što dobivamo za „podozrenja" $2p - x = 0$?

$$2p - x = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{x}{2}$$

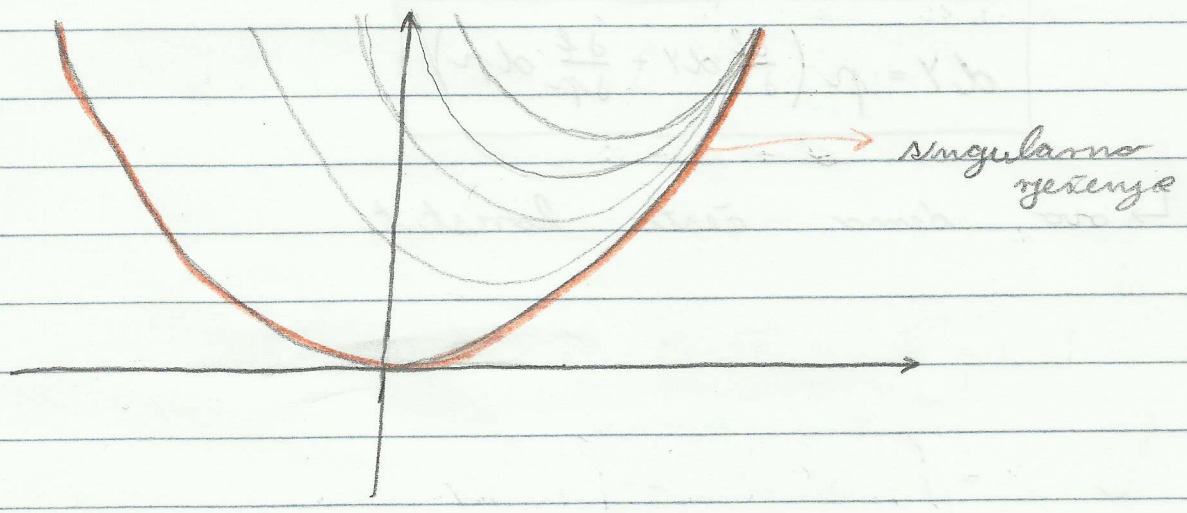
↓

na isti način se vratimo u početnu jednadžbu

↳ ovim putem dobivamo rješenje:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4}}$$

↳ ovo je singularno rješenje jer nema konstante



⇒ NAPOMENA: neće uvijek sve biti lijepo rješeno te ćemo morati rješenje ostaviti u parametarskom obliku

2. SLUČAJ: jednadžbe oblika $x = f(y, y')$

↳ uvodimo parametar:

$$p = y' \quad ; \quad p = p(y)$$

↳ pri tome vrijedi:

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{p}\,dy$$

⇒ deriviramo početnu jednadžbu: $x = f(y, y')$

$$\boxed{dx = \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp}$$

$$\frac{1}{p}\,dy = \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp$$

$$\boxed{dy = p\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp\right)}$$

↳ ovo dema često koristiti

PRI: 10 $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$

↳ uvedimo supstituciju: $y' = p$

↳ nova jednadžba:

$$4xyp = p^3 + 8y^2$$

$$x = \frac{p^2}{4y} + 2 \cdot \frac{y}{p}$$

↳ vidimo da smo dobili da je: $x = f(y, p)$

↳ krenimo deriviranje:

$$\frac{\partial f(y,p)}{\partial y} = -\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p} \qquad \frac{\partial f(y,p)}{\partial p} = \frac{p}{2y} - 2\frac{y}{p^2}$$

↳ primjenimo formulu:

$$dy = p\left[\left(\frac{2}{p} - \frac{p^2}{4y^2}\right)dy + \left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right)dp\right]$$

⋮ sredimo i separiramo

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y} \quad \Rightarrow \quad p = C \cdot \sqrt{y}$$

↳ vratimo „p" u početnu jednadžbu:

$$x = \frac{C^2 \cdot y}{4y} + 2 \cdot \frac{y}{C\sqrt{y}}$$

$$x = \frac{C^2}{4} + \frac{2}{C}\sqrt{y}$$

3. SLUČAJ: jednadžbe oblika $F(x, y') = 0$

↳ isto uvodimo parametar:

$$p = y' \quad ; \quad x = f(p)$$

$$dy = p\,dx$$

$$dy = p \cdot f'(p)\,dp$$

↳ rahljučujemo:

$$y(p) = \int p\, f'(p)\,dp + c$$

$$x(p) = f(p)$$

PR: 11 $\quad e^{y'} + y' = x$

↳ uvedimo supstituciju: $p = y'$

↳ nova jednadžba:

$$e^p + p = x$$

↳ primjenimo formulu za y:

$$y = \int p(e^p + 1)\,dp + c$$

$$y = \int p e^p\,dp + \int p\,dp + c$$

$$y = e^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + c$$

↳ rješenje je stoga:

$$\begin{cases} x = e^p + p \\ y = e^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + c \end{cases}$$

↳ ne možemo odrediti jer je prva jednadžba transcendentalna

POSTOJANJE I JEDNOZNAČNOST RJEŠENJA

⇒ neka naravlja rješenja diferencijalnih jednadžbi:

$$F(x, y, y') = 0$$

$$\hookrightarrow y = f(x, C) \quad \left.\right\} \text{OPĆA RJEŠENJA}$$

$$\hookrightarrow \Phi(x, y, C) = 0 \quad \left.\right\} \text{OPĆI INTEGRAL JEDNADŽBE}$$

$$\hookrightarrow \Phi(x(p), y(p), C) = 0$$

⇒ TEOREM EGZISTENCIJE RJEŠENJA:

↳ neka je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u nekom pravokutniku D oko točke (x_0, y_0)

↳ Cauchyjeva zadaća:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ ima barem jedno rješenje u nekom okolišu točke x_0

⇒ sada znamo da rješenje uvijek postoji, no bitna nam je jedinstvenost rješenja

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE VIŠEG REDA

⇒ ovdje radac pokusiti biti još više šablonski nego kod jednadžbi prvog reda

⇒ opći oblik: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

↳ rješenje je oblika: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

⇒ imati ćemo dva slučaja:

a) linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima (lagano se prepoznaju)

b) sve ostale rješavamo svođenjem stupnja jednadžbe

⇒ krenimo rješavati jednadžbe nekih posebnih oblika

OBLIK: $y^{(n)} = f(x)$

PR: $y'' = \cos(5x) \;/\; \int dx$

$$\int y''(x)\,dx = \int \cos(5x)\,dx$$

$$\int (y'(x))'\,dx = \frac{\sin(5x)}{5} + C_1$$

$$y'(x) = \frac{\sin(5x)}{5} + C_1 \;/\; \int dx$$

$$y(x) = \int \left[\frac{\sin(5x)}{5} + C_1\right] dx$$

$$y(x) = -\frac{\cos(5x)}{25} + C_1 x + C_2$$

↳ recimo da sada radamo početne uvjete:

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 5$$

$$y(0) = -\frac{\cos(0)}{25} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1 + \frac{1}{25}$$

$$y'(0) = \frac{\sin(0)}{5} + C_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 5$$

↳ stoga, naša funkcija sada izgleda:

$$y(x) = -\frac{\cos(5x)}{25} + 5x + \frac{26}{25}$$

OBLIK: $F(x, y^{(n)}) = 0$

↳ ove se jednadžbe mogu faktorizirati i tako se svesti na jednadžbe oblika $y^{(n)} = f(x)$

↳ npr. $(y'')^2 - 1 = 0$

$(y'' - 1)(y + 1) = 0$

↳ no jednadžbe ovog oblika ne mogu se uvijek faktorizirati, pa trebamo postupak parametrizacije

PR: 2 $x - y'' \cdot e^{y''} = 0$

↳ ne možemo naći rješenje jednadžbe $y'' = f(x)$, već samo približno (grafički) odredit sjecišta krivulja

↳ pretpostavimo da se „x" može eksplicitno izraziti, pa krenimo parametarski:

$y'' = t$

↳ sada naša jednadžba izgleda ovako:

$x = t \cdot e^t$

$y'' = t \quad / \int$

$\int y'' \, dx = \int t \, dx$ → znamo da je: $x = t \cdot e^t$, pa je: $dx = (1 \cdot e^t + t \cdot e^t) \, dt$

$y' = \int t(e^t + t \cdot e^t) \, dt +$

$$y' = \int [t^2 \cdot e^t + t e^t]\, dt$$

$$y' = \underbrace{\int t^2 \cdot e^t dt}_{\text{2 puta parcijalna integracija}} + \underbrace{\int t e^t dt}_{\text{jedna parcijalna integracija}}$$

$$y' = (t^2 - t + 1)\, e^t + C_1$$

↳ sada ponovno trebamo integrirati:

$$y = \int [(t^2 - t + 1)\, e^t + C_1]\, dx$$

$$y = \int [(t^2 - t + 1)\, e^t + C_1]\, (e^t + t e^t)\, dt$$

$$y = \int [(t^2 - t + 1)\, e^{2t} + C_1 \cdot e^t]\, (1 + t)\, dt$$

$$y = \int [(t + 1)(t^2 - t + 1)\, e^{2t} + C_1 e^t (1 + t)]\, dt$$

$$y = \underbrace{\int (t^3 + 1)\, e^{2t} dt}_{\text{parcijalna integracija}} + C_1 \underbrace{\int (1 + t) e^t dt}_{\text{parcijalna integracija}}$$

↳ na kraju moramo vratiti supstituciju jer ne tražimo funkciju po varijabli „x"

OBLIK: $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad ; \quad 1 \le k \le n$

↳ ove jednadžbe se lagano prepoznaju te se uvijek rješavaju supstitucijom:

$$z = y^{(k)}$$

(PR: 3) $y'' + y'^2 + 1 = 0$

↳ supstitucija: $z = y'$

↳ sada imamo jednadžbu:

$$z' + z^2 + 1 = 0$$

$$z' = -(z^2 + 1) \quad / \int dx$$

$$-\int \frac{dz}{z^2+1} = x + C_1$$

$$\operatorname{arctg} z = -x + C_1$$

$$z = \operatorname{tg}(-x + C_1)$$

↳ vratimo supstituciju: $y' = \operatorname{tg}(-x + C_1) \quad / \int dx$

$$y = \int \operatorname{tg}(-x + C_1)\, dx$$

$$\vdots$$

$$y = \ln\left[\cos(x - C_1)\right] + C_2$$

OBLIK: $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

↳ nema također red supstitucijom

$$y' = p$$

↳ treba paziti na daljnje derivacije y:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = (y')'_x = \frac{dp}{dx}$$

↳ primjenimo ulančano pravilo:

$$y'' = \underbrace{\frac{dp}{dy}}_{p'} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p} = p' \cdot p$$

↳ pokušajmo izvesti i y''':

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d(p'p)}{dx} = \frac{d(p'p)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (p'' \cdot p + p' \cdot p')\, p$$

$$y''' = \left[p'' \cdot p + (p')^2\right] p$$

⇒ NAPOMENA: ovakve izvode je dobro znati jer se često upotrebljavaju, primjenjuju ulančano pravilo, a i nerijetko su teorijski radac na ispitu

⇒ NAPOMENA: dobro je pamtiti supstituciju za prve tri derivacije (y'', y''')

OBLIK: jednadžbe homogene u $y, y', \dots, y^{(n)}$

↳ ove jednadžbe također rješavamo slijedećom supstitucijom:

$$y = e^{\int z\,dx}$$

↳ izvedmo sada nekoliko derivacija:

$$y' = e^{\int z(x)\,dx} \cdot \left(\int z(x)\,dx\right)'_x = z(x) \cdot e^{\int z(x)\,dx}$$

$$y'' = z'(x) \cdot e^{\int z(x)\,dx} + z^2(x) \cdot e^{\int z(x)\,dx}$$

$$\vdots$$

↳ u ovim jednadžbama bi se nakon supstitucije trebala kratiti neka potencija varijable y

OBLIK: jednadžbe s potpunim diferencijalom

↳ to su funkcije oblika $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ za koje vrijedi da je funkcija „F" diferencijal neke funkcije Φ, pa vrijedi:

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

↳ ako je ovo istina, integriramo:

$$\Phi(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = C$$

↳ tako smo red jednadžbe spustili za jedan stupanj

PR: 6) $y'' + xy' + y = 0$

$$(y')'_x + (xy)'_x = 0$$

→ vidimo da rješavamo jednadžbu s potpunim diferencijalom

$$(y' + xy)'_x = 0$$

↳ sada imamo: $y' + xy = C_1$

$$y' + xy = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -x$$

→ ovo je separacija varijabli

ZAD: 4 1) $y \cdot y''' + 3 \cdot y' \cdot y'' = 0$

$$\underbrace{y y''' + y' y''}_{(yy'')'} + \underbrace{2 y' y''}_{[(y')^2]'} = 0$$

$$\left[y y'' + (y')^2 \right]_x' = 0 \quad / \int dx$$

$$y y'' + (y')^2 = C_1$$

$$y y'' + y' y' = C_1$$

$$\left(y y' \right)_x' = C_1 \quad / \int dx$$

$$y y' = C_1 x + C_2$$

↳ sada je ovo separacija varijabli:

$$y \, dy = (C_1 x + C_2) \, dx \quad / \int$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y^2 = C_1 x^2 + 2 C_2 x + 2 C_3$$

4) $yy'' - y'^2 = y^2 y'$

↳ primjetimo: $(yy')' = (y')^2 + y'' \cdot y$

↳ zbog minusa u zadatku moramo izći na kvocijent umjesto umnoška:

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y'' \cdot y - y^2}{y^2}$$

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = y'$$

↳ ako znamo: $A' = B'$, onda je: $A = B + C$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = y'$$

$$\frac{y'}{y} = y + C_1$$

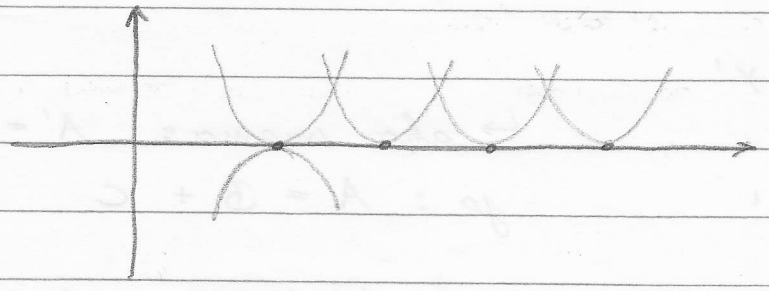
$$\frac{y' - y^2}{y} = C_1 \Rightarrow y' - C_1 y = y^2$$

↓

ovo je zadaća Bernoullijeva jednadžba, pa ju znamo riješiti

JEDNOZNAČNOST RJEŠENJA

PR: Promatramo rješenje diferencijalne jednadžbe koje izgleda ovako:



↳ jedinstvenost će biti narušena ako se rješenja dodiruju

↳ vidimo da „x"-os tangira familiju rješenja, pa nam je jednoznačnost narušena jer je rješenje i „x" os i parabola

↳ znamo da su nam rješenja jednoznačna ako se nalazimo u točki gdje se funkcije rješenja sijeku

⇒ PEANOV TEOREM EGZISTENCIJE:

↳ funkcija $f(x, y)$ je neprekidna u pravokutniku oko točke (x_0, y_0) → ovo nam treba kako bi mogli integrirat u oba smjera (os „x", os „y")

⇒ jedinstvenost imamo ako parcijalne derivacije po svim varijablama (osim „x") Cauchyjeve zadaće $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$ budu ograničene u našem pravokutniku oko (x_0, y_0)

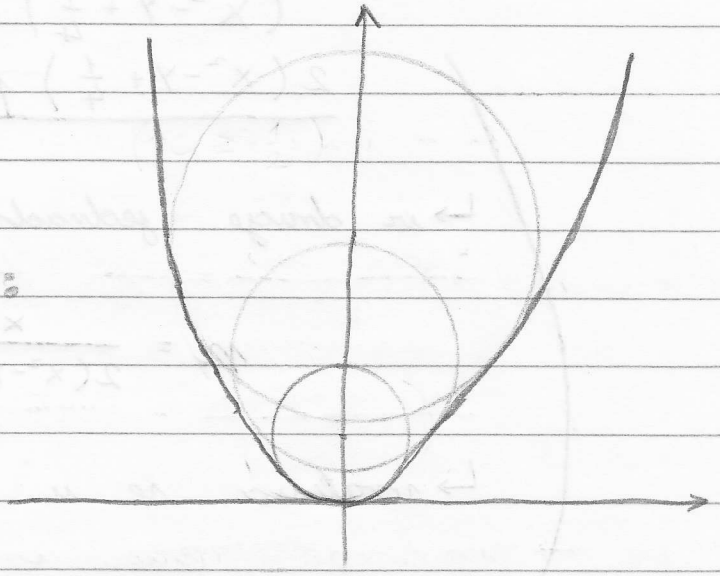
⇒ zadaci koji su biti iz ovog poglavlja su zadaci vezani uz tzv. **ovojnice**

↳ obično će biti zadana familija, a mi trebamo naći ovojnicu

Pr: 26 $x^2 + (y-c)^2 = c - \frac{1}{4}$

$c \geq \frac{1}{2}$

↳ skicirajmo familiju:



$$x^2 + (y-c)^2 = c - \frac{1}{4}$$
$$2x + 2(y-c)^2 \cdot y = 0$$

↳ sada eliminiramo c:

$$x^2 + \frac{x^2}{y^2} = y + \frac{x}{y'} - \frac{1}{4}$$

↳ vidimo da će naša ovojnica izgleda biti parabola

→ imamo diferencijalnu jednadžbu, pa postavimo: $F(x, y, y') = 0$

$$\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right) y'^2 - x y' + x^2 = 0$$

$$\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right) y'^2 - x y' + x^2 = 0$$

↳ postavimo uvjet za jednoznačnost: $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

$$2\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right) y' - x = 0$$

↳ kako bi naglasili da želimo eliminirati y', možemo uvesti parametar $y' = p$, pa imamo sustav:

$$\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right) p^2 - x p + x^2 = 0$$
$$2\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right) p - x = 0$$

↳ iz druge jednadžbe izrazimo „p":

$$p = \frac{x}{2\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right)}$$

↳ vratimo se u prvu jednadžbu:

$$\frac{x}{2} \cdot p - x \cdot \frac{x}{2\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right)} + x^2 = 0$$

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right)} - \frac{x^2}{2\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right)} + x^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{2\left(x^2 - y + \frac{1}{4}\right)} \left(\frac{1}{2} - 1\right) + x^2 = 0$$

$$\vdots$$

$$y = x^2$$

⇒ NAPOMENA: postoj i kraći postupak za računanje same ovojnice

↳ to je postupak preko eliminacije konstante iz sustava:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

↳ činjenično znanje ovih teorema je dovoljno jer su dokaz prekompleksni

⇒ NAPOMENA: jedino za linearne diferencijalne jednadžbe viših redova postoj univerzalna metoda rješavanja i to samo za linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

↳ to je rato što po Picardovom teoremu parcijalne derivacije izgledaju ovako:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{A_0(x)}{A_n(x)} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{A_1(x)}{A_n(x)} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{A_{n-1}(x)}{A_n(x)}$$

↳ iz toga vidimo da rješenje postoji i da je jedinstveno

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA DRUGOG REDA

⇒ naš postupak će biti da nađemo neko rješenje, pa pomoću njega nađemo daljna rješenja

ZAD: 10 $\quad x y'' + 2y' + xy = 0$

$y_1 = \frac{\sin x}{x}$ → jedno rješenje jednadžbe

$y_1' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

$y_1'' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} - \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4}$

↳ postupak rješavanja: $\boxed{y = u \cdot y_1}$

$y' = u' y_1 + u y_1'$

$y'' = u'' y_1 + \underbrace{u' y_1' + u' y_1'}_{2u' y_1'} + u y_1''$

↳ sada dobiveno uvrstimo u početnu jednadžbu

$$x\left(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''\right) + 2\left(u'y_1 + uy_1'\right) + xuy_1 = 0$$

$$u''(xy_1) + u'(2xy_1' + 2y_1) + u\underbrace{(xy_1'' + 2y_1' + xy_1)}_{} = 0$$

po početnoj jednadžbi zaključujemo da je ovo jednako nula

$$u'' \cdot x \cdot \frac{\sin x}{x} + u' \cdot \left[2x \cdot \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) + \frac{2\sin x}{x}\right] = 0$$

$$u'' \cdot \sin x + u' \cdot 2\cos x = 0$$

↳ uvedemo supstituciju: $z = u'$

$$z' \cdot \sin x + 2z\cos x = 0$$

$$z' \sin x = -2z\cos x \quad / : z \; / : \sin x$$

$$\frac{z'}{z} = -\frac{2\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2\cos x}{\sin x}\,dx \quad / \int$$

$$\ln z = -2\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\ln z = -2\ln(\sin x) + C_1 \quad / e^x$$

$$z = \sin^{-2}(x) \cdot e^{C_1} \qquad C_1 > 0$$

$$z = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot C_1$$

OKRENI

$$u' = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot c_1 \quad / \int dx$$

$$u = c_1 \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

↳ primjenimo tablični integral:

$$u = -c_1 \cdot \operatorname{ctg} x + c_2$$

$$\frac{y}{y_1} = c_1 \operatorname{ctg} x + c_2$$

$$y = \frac{1}{x} \left(c_1 \cos x + c_2 \sin x \right)$$

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE DRUGOG REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

⇒ to su jednadžbe oblika:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

↳ znamo da je eksponencijalna funkcija $y = e^{ax}$ rješenje jednadžbe prvog reda:

$$y' - ay = 0$$

↳ znamo da je: $f(x) = e^{\lambda x}$

$$\downarrow$$

$$f^{(n)}(x) = \lambda^n \cdot e^{\lambda x} > 0$$

↳ vratimo se u opću diferencijalnu jednadžbu:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

KARAKTERISTIČNA JEDNADŽBA

ZAD: 5 2) $y'' + 4y' - 5y = 0$

↳ odmah pišemo karakterističnu jednadžbu:

$$r^2 + 4r - 5 = 0$$

$r_1 = 1$ $\qquad$ $r_2 = -5$

↳ rješenje ovoga oblika:

$$y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-5x}$$

3) $y'' + 6y' = 0$

$$r^2 + 6r = 0$$

$r_1 = 0$ $\qquad$ $r_2 = -6$

↳ rješenje diferencijalne jednadžbe je:

$$y = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^{-6x}$$

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^{-6x}$$

4) $y'' + 6y = 0$

$r^2 + 6 = 0$

$r_1 = \sqrt{6}\, i$ $\qquad$ $r_2 = -\sqrt{6}\, i$

↳ vratimo supstitucijo: $y = e^{rx}$

$$e^{(0 \pm \sqrt{6} i)x} = e^{0x} \left[\cos(\sqrt{6}x) \pm \sin(\sqrt{6}x)\right] =$$

$$= \cos(\sqrt{6}x) \pm \sin(\sqrt{6}x)$$

↳ rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y = C_1 \cos(\sqrt{6}x) + C_2 \sin(\sqrt{6}x)$$

⇒ pogledajmo primjer kada je diskriminanta karakterističnog jednadžbe jednaka nul:

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$r^2 - 8r + 16 = 0$$

$$(r-4)^2 = 0$$

$$r_{1,2} = 4$$

OKRENI →

↳ sada nam je rješenje jednadžbe prvog reda:

$$y_1 = e^{4x}$$

↳ za y_2 uvijek: $y_2 = x e^{4x}$

$$y_2' = 1 \cdot e^{4x} + x e^{4x} \cdot 4$$

$$y_2'' = 4 e^{4x} + 16 x e^{4x}$$

↳ sve se vratimo u početnu jednadžbu

$$e^{4x}(8 + 16x) - 8 e^{4x}(1 + 4x) + 16 x e^{4x} = 0$$

$$e^{4x} \underbrace{(8 + 16 - 8 - 32x + 16x)}_{\text{uvijek će biti jednako nul}} = 0$$

↳ zaključujemo da ist postupak možemo primijeniti i na diferencijalne jednadžbe čija karakteristična jednadžba ima diskriminantu jednaku nuli

⇒ proširimo jednadžbe iz ovog poglavlja na jednadžbe oblika:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

↳ nađimo prvo rješenje pripadne homogene jednadžbe:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

↳ „homogeno" rješenje:

$$y_H = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}$$

↳ naravno, još trebamo pronaći partikularno rješenje zadane jednadžbe:

- partikularno rješenje nalazimo pomoću derivacija homogenog rješenja

⇒ NAPOMENA: ovaj način rješavanja primjenjuje se i na rješavanje diferencijalnih jednadžbi višeg reda (tamo ima više deriviranja)

VEKTORSKI POTPROSTORI I LINEARNI OPERATORI

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

↳ možemo pisati ovako:

$$\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \frac{df}{dx} + \beta \cdot \frac{dg}{dx}$$

↳ zahljučujemo da je $\frac{d}{dx}$ linearan operator

⇒ bitno je preporučati kada su funkcije linearno nezavisne:

$$\alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{-x} = 0$$

↳ uvrst: $x = 0$

$x = \ln 2$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 \cdot e^{2\ln 2} + \alpha_2 \cdot e^{-\ln 2} = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$4\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - 4 \neq 0$$

↳ sustav ima trivijalno rješenje, pa je:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

↳ mi smo ovdje trebali uvrštavat „x"-eve kako bi dobili potrebne jednadžbe za sustav

↳ DETERMINANTA WRONSKOG daje puno bolje rješenje preko derivacija (koristi se svojstvo da je diferenciranje linearni operator)

$$W(y_1, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

↓

ako je ova determinanta NIJE jednaka nul tada su funkcije $y_1, \dots, y_n$ linearno neovisne

NALAŽENJE PARTIKULARNOG RJEŠENJA

PR: Pogledajmo jednadžbu: $y''' - y'' = x e^x$ BITNO!

↳ karakteristična jednadžba: $r^3 - r^2 = 0$

$$r_{1,2} = 0 \qquad r_3 = 1$$

↳ vektorski podprostor je trodimenzionalan jer je jednadžba trećeg stupnja

↳ možemo odmah pisati homogeno rješenje:

$$y_H = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot e^x$$

↳ sada treba variirati konstantu:

$$y = C_1(x) + C_2(x)\, x + C_3(x)\, e^x$$

$$y' = \underbrace{C_1'(x)}_{=0} + \underbrace{C_2'(x)}_{=0} x + C_2(x) + \underbrace{C_3'(x)}_{=0} e^x + C_3(x)\, e^x$$

↳ ove konstante proglasimo da su nula te krenemo dalje derivirati:

$$y'' = \underbrace{C_2'(x)}_{=0} + \underbrace{C_3'(x)}_{=0} e^x + C_3(x)\, e^x$$

↳ deriviramo i dalje:

$$y''' = \boxed{C_3'(x)}\, e^x + C_3(x)\, e^x$$

$= f(x)$

→ ovaj član jedini ostaje

↳ radnju put deriviramo: (nepotrebno)

↳ jer je jednadžba trećeg stupnja

$$y^{IV} = \boxed{C_3'(x)}\, e^x + C_3(x)\, e^x$$

$= f'(x)$

↳ ovaj član jedini ostaje

⇒ ove članove možemo proglasit da su nula jer su ova rješenja pripadne homogene jednadžbe, pa na krajnjem uvrštavanju ostaju samo članovi koje nismo uokvirili

$$C_1'(x) + C_2'(x)\, x + C_3'(x) \cdot e^x = 0$$

$$C_2'(x) + C_3'(x) \cdot e^x = 0$$

$$C_3'(x) \cdot e^x = x \cdot e^x$$

↳ sada imamo sustav, pa ga rješimo:

$$C_3'(x) \cdot e^x = x\, e^x$$

$$C_3'(x) = x \quad / \int$$

$$C_3(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

↳ vratimo se u drugu jednadžbu sustava:

$$C_2'(x) + x e^x = 0$$

$$C_2'(x) = -x e^x \quad / \int$$

⋮ integriranje (parcijalna integracija)

$$C_2(x) = (1 - x) e^x$$

↳ sada imamo $C_2(x)$ i $C_3(x)$, pa trebamo naći još $C_1(x)$:

$$C_1'(x) - x e^x \cdot x + x e^x = 0$$

$$C_1'(x) = e^x (x^2 - x) \quad / \int$$

⋮ integriranje (dva puta parcijalna integracija)

$$C_1(x) = (x^2 - 3x + 3) e^x$$

↳ sada napišemo naše rješenje:

$$y = \underbrace{C_1 + C_2 x + C_3 e^x}_{\text{homogeno rješenje}} + \underbrace{(x^2 - 3x + 3) e^x \cdot 1 + (1 - x) e^x \cdot x + \frac{x^2}{2} \cdot e^x}_{\text{partikularno rješenje}}$$

⇒ ZAKLJUČAK: ako je diferencijalna jednadžba „n"-tog reda, homogeno rješenje ima „n" konstanti, vektorski podprostor je „n" dimenzionalan te je naša matrica $n \times n$

⇒ najčešće će naše jednadžbe biti drugog reda (rijetko trećeg - onda su jednostavne)

PR: 8 $\quad y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

↳ karakteristična homogena jednadžba:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm i$$

↳ rješenja pišemo ovako:

$$\alpha \mp \beta i = 0 \pm i$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x = \cos x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x = \sin x$$

↳ homogeno rješenje je: $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

↳ krenimo partikularno: $y_p = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$

↳ iz napisanog slijedi sustav:

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$$

$$-C_1'(x) \sin x + C_2(x) \cos x = \frac{1}{\sin x}$$

OKRENI

↳ iz prve jednadžbe izrazimo $C_1'(x)$:

$$C_1'(x) = -\frac{C_2'(x)\sin x}{\cos x}$$

↳ ovo vratimo u drugu jednadžbu:

$$\frac{C_2'(x)\sin x}{\cos x} + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\sin x}$$

$$C_2'(x)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\right) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\vdots$$

$$C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad / \int$$

$$C_2(x) = \ln(\sin x)$$

↳ $C_2'(x)$ možemo vratit u $C_1'(x)$ kako bi nasl drugu konstantu → $C_1(x)$:

$$C_1'(x) = -\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot \sin x}{\cos x}$$

$$C_1'(x) = -1 \quad / \int \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = -x$$

↳ naše rješenje izgleda ovako:

$$y = \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{\text{homogeno}} \underbrace{- x\cos x + \ln(\sin x)\sin x}_{\text{partikularno}}$$

⇒ u radacma koj su linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda, ali ne s konstantnim koeficijentima, moramo imati „dobru vilu" koja nam je dočaprula jedno rješenje

⇒ sada pogledajmo posebne slučajeve linearnih diferencijalnih jednadžbi višeg reda s konstantnim koeficijentima

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE „n"-tog REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

⇒ mi ćemo se kretati samo u poslednjem slučaju te se više nećemo koristiti varijacijom konstanti

⇒ ako nek polinom ima kompleksna rješenja, onda ih mora biti paran broj jer su kompleksna rješenja uvijek u paru (konjugirano kompleksna)

⇒ pogledajmo polinom: $x^6 - 2x^3 + 1 = (x-1)^2(1+x+x^2)^3$

↳ on je karakteristični polinom jednadžbe:

$$y^{VI} - 2y''' + y = 0$$

$$\tau_1 = \tau_2 = 1 \qquad \tau_{3,4} = \tau_{5,6} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

↳ napišimo skup rješenja:

$$e^{1x}, \; x e^{x}$$

$$e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad x\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

⇒ ODREDIVANJE PARTIKULARNOG RJEŠENJA:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right]$$

↳ „α" i „β" u izrazu iz funkcije (odaberemo ih tako da dobijemo željeni oblik)

↳ „Q_1" i „Q_2" su karakteristični polinomi

$$y_p = x^m \cdot e^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos(\beta x) + R_2(x)\sin(\beta x)\right]$$

↳ „m" je kratnost točaka $\alpha \pm \beta i$ u karakterističnom polinomu

↳ „R_1" i „R_2" su polinomi najvećeg stupnja od „Q_1" i „Q_2"

Zad: Rješi diferencijalnu jednadžbu:

$$y^{IV} + y'' = e^x \sin x$$

↳ karakterističan polinom:

$$r^4 + r^2 = 0$$

$$r^2(r^2 + 1) = 0$$

$$r_1 = r_2 = 0 \qquad r_{3,4} = \pm i$$

↳ računamo homogeno rješenje:

$$y_H = C_1 \cdot e^{0 \cdot x} + C_2 x \cdot e^{0 \cdot x} + C_3 e^{0 \cdot x} \cos x + C_4 e^{0 \cdot x} \cdot \sin x$$

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

↳ sada krenimo sa funkcijom:

$$f(x) = e^x \sin x$$

↳ za $\alpha = 1$ i $\beta = 1$:

$$\alpha \pm i\beta = 1 \pm i \neq 0 \pm i$$

↳ zaključak: $m = 0$

↳ slijed: $Q_1(x) = 0$; $Q_2(x) = 1$

$$\max\{\partial Q_1, \partial Q_2\} = 0$$

(stupanj polinoma)

$$R_1(x) = A_1$$

$$R_2(x) = A_2$$

↳ sada znamo partikularno rješenje:

$$y_p = x^0 \cdot e^x (A_1 \cos x + A_2 \sin x)$$

↳ još trebamo dobiti „A_1" i „A_2"

↳ deriviramo y_p:

$$y_p' = e^x (A_1 \cos x + A_2 \sin x) + e^x (-A_1 \sin x + A_2 \cos x)$$

$$y_p' = e^x [(A_1 + A_2) \cos x + (A_2 - A_1) \sin x]$$

↳ deriviramo još jednom:

$$y_p'' = e^x [(A_1 + A_2) \cos x + (A_2 - A_1) \sin x] + e^x [-(A_1 + A_2) \sin x + (A_2 - A_1) \cos x]$$

$$y_p'' = 2 e^x [A_2 \cos x - A_1 \sin x]$$

↳ još trebamo treću i četvrtu derivaciju:

$$y_p''' = 2 e^x [(A_2 - A_1) \cos x - (A_1 + A_2) \sin x]$$

$$y_p^{IV} = 2 e^x [-2 A_1 \cos x - 2 A_2 \sin x] = -4 e^x [A_1 \cos x + A_2 \sin x]$$

↳ sada kada smo dobili derivacije partikularnog rješenja, vratimo se u početnu jednadžbu

OKRENI

$$y^{IV} + y'' = e^x \sin x$$

$$-4e^x(A_1\cos x + A_2 \sin x) + 2e^x(A_2\cos x - A_1 \sin x) = e^x \sin x$$

$$\cos(x)\cdot(-4A_1 + 2A_2) + \sin(x)\cdot(-4A_2 - 2A_1) = \sin x$$

↳ sada je ključni trenutak: treba preporvnat sustav jer da bi gornja jednadžba bila zadovoljena treba vrijediti:

$$-4A_1 + 2A_2 = 0$$
$$-4A_2 - 2A_1 = 1$$

↳ rješimo sustav: $A_1 = -\frac{1}{10}$; $A_2 = -\frac{1}{5}$

↳ konačno rješenje sada izgleda ovako:

$$y = y_H + y_P$$

$$y = \underbrace{C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4 \sin x}_{\text{homogeno}} \underbrace{- \frac{e^x}{10}\sin x - \frac{e^x}{5}\sin x}_{\text{partikularno}}$$

↳ drugi način je parametar varijacija: $z = y''$

↳ tim načinom bi dobil $A_1 = -\frac{2}{5}$, $A_2 = \frac{1}{5}$, al je to dobro jer joj uvijek te zadovoljava sustav

↳ no, kada se vraćamo iz parametra, treba dva puta integrirat što je često teže od deriviranja

(2) 2) $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$

$r^3 + r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r(r^2 + r - 2) = 0$

$r_1 = 0 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = -2$

↳ sada već imamo homogeno rješenje:

$y_H = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$

$f(x) = x - e^x = f_1(x) + f_2(x)$

↳ sada imamo dvije funkcije s desne strane, pa rješavamo svaku posebno:

$\underline{f_1(x) = x}$

$\alpha = 0, \ \beta = 0$

$\alpha \pm i\beta = 0 = r_1$

$m = 1$

$\underline{f_2(x) = -e^x}$

$\alpha = 1, \ \beta = 0$

$\alpha \pm i\beta = 1 = r_2$

⇓ Q_1, Q_2 su konstante

$y_{P_1} = x^1 e^{0x}\left((Ax + B)\cos 0x + (Cx + D)\sin 0x\right)$

$Q_1(x) = x \qquad Q_2(x) =$ „NEGITNO"

drugog člana nema

$y_{P_2} = x e^x \cdot C$

$y_{P_1} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

↳ dalje je isti postupak kao u prethodnom zadatku

BITNO!

4) $y''' - y'' = 4\,\mathrm{sh}\,x$

$$r^2(r-1)=0 \quad \Rightarrow r_1 = r_2 = 0\,;\; r_3 = 1$$

↳ homogeno rješenje: $y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$

↳ vratimo se na funkciju:

$$f(x) = 4\,\mathrm{sh}\,x = 4 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2e^x - 2e^{-x}$$

↳ ponovno imamo dvije funkcije s desne strane

a) $f_1(x) = 2e^x$; $\alpha = 1$, $\beta = 0$

$\alpha \pm i\beta = 1 = r_3 \Rightarrow m = 1$

$Q_2 = \text{const}$

$$y_{P_1} = x^1 e^x \cdot (A\cos 0\cdot x + B\sin 0x) = Axe^x$$

↳ trebamo naći tri derivacije:

$$y' = Ae^x + Axe^x = Ae^x(1+x)$$

$$y'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = Ae^x(2+x)$$

$$y''' = Ae^x + Ae^x + Ae^x + Axe^x = Ae^x(3+x)$$

↳ sada uvrstimo u početnu:

$$A(x+3)e^x - A(x+2)e^x = 2e^x$$

$$\vdots$$

$$A = 2$$

↳ prvo partikularno rješenje: $y_{p_1} = 2xe^{x}$

b) $f_2(x) = -2e^{-x}$; $\alpha = -1$, $\beta = 0$

$\alpha \pm i\beta = -1 \neq r_i \Rightarrow m = 0$

„Q_1" i „Q" su const

$$y_{p_2} = x^0 e^{-x}(A\cos 0x + B\sin 0x) = Ae^{-x}$$

↳ krenimo naći tri derivacije:

$y' = -Ae^{-x}$, $y'' = Ae^{-x}$, $y''' = -Ae^{-x}$

↳ uvrstimo u početnu:

$$-Ae^{-x} - Ae^{-x} = -2e^{-x} \Rightarrow A = 1$$

↳ drugo partikularno rješenje: $y_{p_2} = e^{-x}$

↳ konačno rješenje:

$$y = y_H + y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$y = \underbrace{2xe^{x}}_{\text{prvo partikularno}} + \underbrace{e^{-x}}_{\text{drugo partikularno}} + \underbrace{C_1 + C_2 x + C_3 e^{x}}_{\text{homogeno}}$$

RJEŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI POMOĆU REDOVA

⇒ znamo da su redovi jednostavni za deriviranje i integriranje - to će biti korisno

⇒ ANALITIČKE FUNKCIJE:

↳ funkcije koje se mogu razviti u red

↳ klase su C^∞ → imaju beskonačno derivacija

⇒ ova metoda će se najčešće koristiti za rješavanje diferencijalnih jednadžbi (linearnih) s varijabilnim (ne-konstantnim) koeficijentima

npr. $Y'' + (X)Y' + Y = 0$

↳ nije konstanta

⇒ ova metoda se također koristi u računalima tamo računamo red rekurzivno

⇒ pogledajmo funkciju: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + k a_k x^{k-1} + (k+1) a_{k+1} x^k + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \dots + k(k-1) a_k x^{k-2} + (k+1) k a_{k+1} x^{k-1} + \dots$$

↳ pomnožimo y' sa „x“:

$$xy' = a_1 x + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + \dots + k a_k x^k + (k+1) a_{k+2} x^{k+1} + \dots$$

↳ uzmimo da imamo diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + xy' + y = 0$$

↳ sada uvrstimo gore dobivene

$$\underbrace{(a_0 + 2a_2)}_{=0} + x\underbrace{(6a_3 + a_1 + a_1)}_{=0} + \dots + x^k \underbrace{\left((k-1) a_k + (k+2)(k+1) a_{k+2}\right)}_{=0} + \dots = 0$$

↳ sada rabljenjem da svi pribrojnici trebaju rezultirat funkciju s desne strane (u našem slučaju nula):

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_1$$

$$\vdots$$

$$(k+1) a_k = -(k+2)(k+1) a_{k+2} \Rightarrow a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2}$$

↳ ovo je legitiman postupak, al mi demo koristit lukaviji pristup

↳ naša želja će biti sve svesti na jednu sumu - to činimo supstitucijom

↳ pogledajmo primjer: (supstitucija, nije derivacija)

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \left| \begin{array}{l} k' = k-2 \\ k' = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty} (k'+2)(k'+1)\, a_{k'+2}\, x^{k'}$$

↳ ovo je suma pa indeksacija nije bitna te se možemo vratiti na početnu varijablu (k):

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, x^{k}$$

↳ na ovaj način možemo sve svesti pod jednu sumu što će biti korisno u zadacima

PR: 18 Riješi jednadžbu: $y'' + xy = 0$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

↳ trebamo drugu derivaciju:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \Rightarrow y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

↳ uvrstimo u početnu jednadžbu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}}_{\substack{k' = k-2 \\ k' = -2, -1, \dots}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}}_{\substack{k' = k+1 \\ k' = 1, 2, \dots}} = 0$$

→ supstitucija

$$\sum_{k'=-2}^{\infty} (k'+2)(k'+1) a_{k'+2} x^{k'} + \sum_{k'=1}^{\infty} a_{k'-1} x^{k'} = 0$$

↳ da bi spojili ove dvije sume, prvu sumu treba raspisati do $k' = 1$:

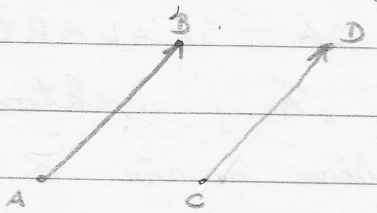
$$\underbrace{0 + 0}_{\text{dobro je dok se ovo des!}} + 2a_2 x^0 + \sum_{k'=1}^{\infty} \left[(k'+2)(k'+1) a_{k'+2} + a_{k'-1} \right] x^{k'} = 0$$

↳ odavdje isčitamo što mora vrijediti:

$$(k'+2)(k'+1) a_{k'+2} + a_{k'-1} = 0$$

VEKTORI

⇒ usmjerena dužina nije isto kao i vektor



→ dvije usmjerene dužine, a samo jedan vektor

⇒ vektore nekad zapisujemo malim masnim slovima

⇒ VEKTOR JE DEFINIRAN S:

a) nosačem - pravac na kojem se vektor nalazi

b) orjentacijom - orjentacija na pravcu

c) duljinom - duljina od početne do krajnje točke

⇒ NUL VEKTOR: vektor duljine 0

↳ nema nosač niti orjentaciju

⇒ RADIJ VEKTOR: označimo točku O kao ishodište, tada je $\overrightarrow{OT}$ radijvektor točke T

⇒ ZBRAJANJE VEKTORA - isto svojstva kao kod rada s brojevima

- pravilo trokuta i paralelograma

⇒ ODUZIMANJE VEKTORA - zbrajanje sa suprotnim vektorom (suprotan vektor je vektor suprotne orjentacije)

⇒ MNOŽENJE VEKTORA SA SKALAROM:

↳ za realan broj „λ", vektor $\vec{\lambda a}$ ima:

- nosač identičan nosaču $\vec{a}$
- istu orjentaciju za $\lambda > 0$, suprotnu za $\lambda < 0$

↳ svojstva množenja sa skalarom:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$$

⇒ JEDINIČNI VEKTOR:

↳ neka je $a \neq 0$ zadani vektor

↳ $\hat{a}$ je jedinični vektor vektora $\vec{a}$ ako vrijedi:

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

⇒ skup nad kojim vrijede svojstva zbrajanja i množenja sa skalarom, te svojstvo:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

nazivamo VEKTORSKI PROSTOR

⇒ LINEARNA NEZAVISNOST VEKTORA:

- dva su vektora zavisna ako se nalaze na istom nosaču, tj. jednoga mogu zapisat pomoću drugog
  ↳ vrijedi i za ostali broj vektora
- vektori su linearno neravisni ako nisu linearno zavisni

DEFINICIJA: vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ su linearno neravisni ako iz jednakosti:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m = \vec{0}$$

slijedi da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$

⇒ najveći broj linearno neravisnih vektora u nekom vektorskom prostoru zove se **dimenzija** tog prostora

TEOREM: (bitno !!) (vrijedi za sve dimenzije)
↳ neka su $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ linearno neravisni
↳ prikaz vektora $\vec{a} \in V^2$ u obliku:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

je jednoznačan, tj. skalari λ_1 i λ_2 su jednoznačno odredeni

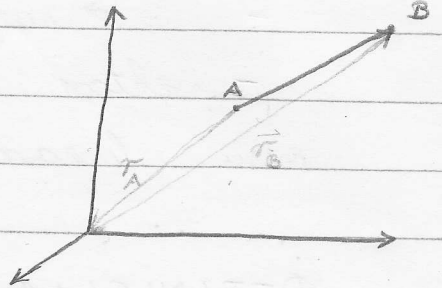
- pogledaj dokaz u knjižici (str 7.)
- riješi zadatak 4 i 5 na stranci 30

⇒ bitno za zadatke:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

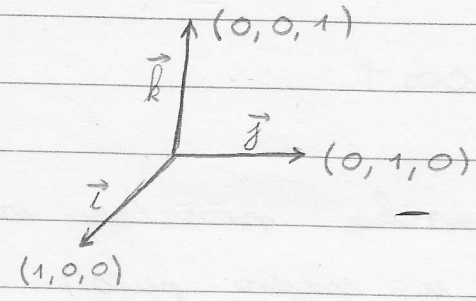
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$



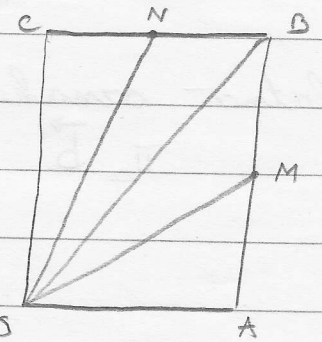
KOORDINATIZACIJA

⇒ Gurd su po prirodi „kockasti", pa koriste kanonsku bazu jer ju najlakše poimaju



$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

PRIMJER 6: U pravokutniku OABC s vrhovima O(0,0), A(3,0), C(0,4), povučene su spojnice OM, ON vrha O sa polovištima M, N stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$. Rastavi vektor $\overrightarrow{OB}$ po komponentama u smjerovima $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$?



$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \quad /\cdot 2 \; /-\downarrow$$
$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \quad /\cdot 2 \; /-\uparrow$$

$$2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \vec{O}$$

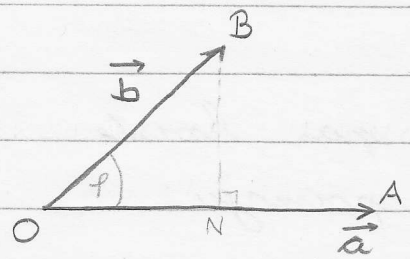
$$2\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \vec{O} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{ON} - \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{ON} + \frac{4}{3}\overrightarrow{ON} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$$

SKALARNI UMNOŽAK



$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{ON}|}{|\vec{b}|}$$

$$|\overrightarrow{ON}| = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

↳ definicija skalarnog umnoška proizlazi iz mehanike (određivanje sile u smjeru puta)

⇒ PROJEKCIJA VEKTORA NA VEKTOR:

$$\vec{b}_a = \underbrace{|\vec{b}| \cos\varphi}_{\text{skalarna komponenta}} \cdot \underbrace{\hat{a}}_{\text{vektorska komponenta}}$$

↳ brtna oznaka:

$\Pi_a \vec{b}$ - čitaj: projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$

⇒ SKALARNI UMNOŽAK U KANONSKOJ BAZI:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

(vidi stranicu 16. u knjižici)

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ZAD: Odred $|\vec{a}|$ za $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, ako je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$!

$$|\vec{a}|^2 = (\vec{p} - 2\vec{q})(\vec{p} - 2\vec{q}) = \qquad \left(|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}\right)$$

$$= \vec{p}\,\vec{p} - 2\vec{p}\,\vec{q} - 2\vec{p}\,\vec{q} + 2\vec{q} \cdot 2\vec{q} =$$

$$= |\vec{p}|^2 - 4\vec{p}\,\vec{q} + 4|\vec{q}|^2 =$$

$$= 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{6} + 4 \cdot 3^2 =$$

$$= 40 - 12\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{40 - 12\sqrt{3}}$$

VEKTORSKI UMNOŽAK

⇒ vektorski umnožak ima smisla samo u V^3

⇒ VEKTORSKI UMNOŽAK:

↳ vektor sa sljedećim svojstvima:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\sphericalangle(a,b))$
2) $\vec{a} \times \vec{b}$ je okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$
3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ tvori desnu bazu

⇒ SVOJSTVA VEKTORSKOG UMNOŠKA:

a) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

↳ homogenost

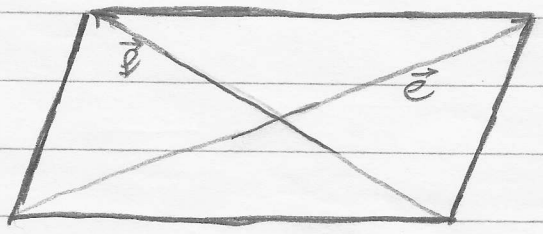
b) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

↳ antikomutativnost

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

↳ distributivnost

PRIMJER 12: Neka su $\vec{m}$, $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut od 45°. Odredi površinu paralelograma s dijagonalama $e = 2m - n$, $f = 4m - 5n$!



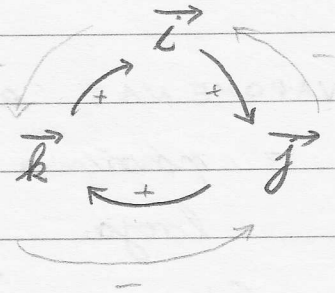
$P = \frac{1}{2}|\vec{e}|\,|\vec{f}|\cdot\sin(\sphericalangle(e,f))$

$P = \frac{1}{2}|\vec{e} \times \vec{f}|$

↳ izračunaj

VEKTORSKI UMNOŽAK U KANONSKOJ BAZI

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0



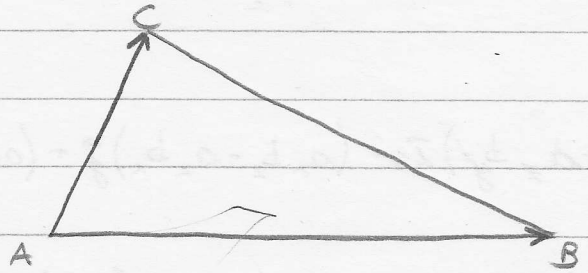
$$\vec{a} \times \vec{b} = \dots\dots = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

↳ PRIMJETI: ovo je determinanta sljedeće matrice:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

PRIMJER 14: Odredi površinu P i visinu v_B spuštenu iz vrha B u trokutu ABC sa vrhovima $A(1,-2,8)$, $B(0,0,4)$ $C(6,2,0)$ ▽.

↳ NAPOMENA: ako su koordinate cjelobrojne, površina je cijeli broj ili pola cijelog broja



$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$P = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-28\vec{j} - 14\vec{k}\right| =$$

$$= 7\left|2\vec{j} + \vec{k}\right| = 7\sqrt{5}$$

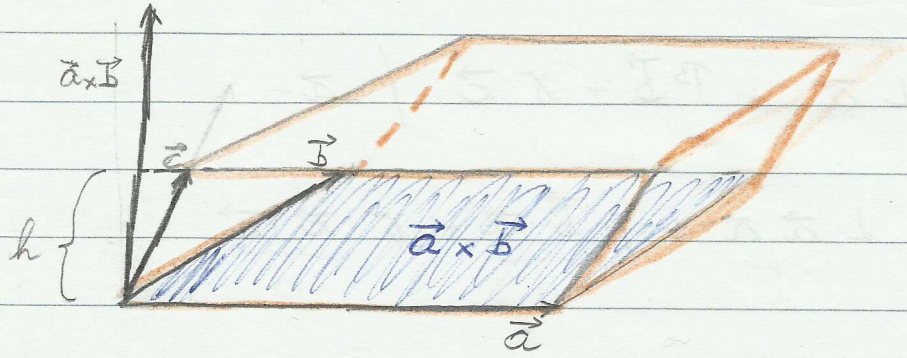
$$P = \frac{1}{2} v_b \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|$$

$$v_b = \frac{2P}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$$

MJEŠOVITI UMNOŽAK

⇒ definirano miješani umnožak samo za vektorski prostor V^3

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$



↳ vidimo da je baza paralelopipeda jednaka $\vec{a} \times \vec{b}$, a volumen paralelopipeda jednaka:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

⇒ vrijedi:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

RASTAV VEKTORA PO BAZI

⇒ pretpostavimo da imamo ortonormiranu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

↳ izvan vektor $\vec{d}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$

$\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c} \perp \vec{a}$

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad / \cdot \vec{a}$$

$$\vec{d} \cdot \vec{a} = \alpha \underbrace{\vec{a} \vec{a}}_{1} + \beta \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{a}}_{0} + \gamma \cdot \underbrace{\vec{c} \cdot \vec{a}}_{0}$$

$$\alpha = \vec{d} \cdot \vec{a}$$

ZAD: $|\vec{x}| = 5$

$|\vec{y}| = 6$

$|\vec{x}+\vec{y}| = 7$

$|\vec{x}-\vec{y}| = ?$

$$|\vec{x}-\vec{y}| = \sqrt{(\vec{x}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{y})} = \sqrt{\vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y}} =$$

$$= \sqrt{25 + 36 - 2\vec{x}\vec{y}} = (*)$$

$$49 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + \vec{y}\vec{y} + 2\vec{x}\vec{y} =$$

$$= 25 + 36 + 2\vec{x}\vec{y}$$

$$2\vec{x}\vec{y} = -12$$

$$(*) = \sqrt{25 + 36 + 12} = \sqrt{73}$$

ZAD: Neka je $\vec{a} = 24\vec{i} - 7\vec{j}$, a $|\vec{b}| = 15$. Nađi moguće vrijednosti za $|\vec{a} + \vec{b}|$!

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (a+b \mid a+b) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}| + 2\vec{a}\vec{b} =$$

$$= 25^2 + 15^2 + 2 \cdot 25 \cdot 15 \cdot \cos\varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$10 \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq 40$$

ZAD: Ako je vektor $\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ okomit na vektore $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ te $-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ izračunaj komponente y i z.

↳ ovaj zadatak možemo riješit na dva načina:

a) vektorski produkt

b) skalarni produkt - imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

ZAD: Zadan je trokut sa vrhovima $A(3, 1, \lambda)$, $B(2, -1, 4)$, $C(1, 2, 3)$. Odredi $\lambda \in R$ tako da kut uz vrh C bude pravi.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

↳ dalje je sve puki račun
↳ odredi pripadne vektore i odredi parametar λ

ZAD: Dokaži da točke $A(-3, 2, 4)$, $B(6, 5, 10)$, $C(9, 1, 4)$, $D(3, -1, 0)$ leže u istoj ravnini.

↳ odredi mješoviti produkt pripadnih vektora
↳ ako je mješoviti produkt 0, onda su točke u istoj ravnini

RAVNINA

⇒ ravnina je odredena jednom točkom i vektorom normale

↳ stoga, ravnina je odredena jednim vektorom (i njegovim nožištem)

⇒ JEDNADŽBA RAVNINE:

↳ ravnina sadrži $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i ima vektor normale $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

PRIMJER 2: Napiši jednadžbu ravnine π koja je okomita na ravnine $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z + 1 = 0$, prolazi točkom $T(1, 2, -1)$ ∇:

$$\vec{n}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \; ; \; \vec{n}_2 = \vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{n} = 2\vec{i} \times \vec{k} - \vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{i} =$$

$$= -2\vec{j} + \vec{k} - \vec{i} + \vec{j} - \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\pi \equiv -x - y + z + 4 = 0$$

⇒ RAVNINA ZADANA S TRI TOČKE:

↳ imamo tri točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ i točku ravnine $T(x, y, z)$

↳ vektori $\overrightarrow{T_1T}$, $\overrightarrow{T_2T}$, $\overrightarrow{T_3T}$ leže u istoj ravnini, pa je mješoviti umnožak jednak nuli:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

↳ rastavimo po prvom stupcu i dobijemo opću jednadžbu

⇒ SEGMENTNA JEDNADŽBA RAVNINE:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

ili ovako:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

⇒ PARAMETARSKA JEDNADŽBA RAVNINE:

↳ prethod općoj jednadžbi

Pogledaj ravninu:

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$-2y = 5 - x - 3z \quad / \cdot (-2)$$

$$y = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z$$

OKRENI

↳ sada se nam x i z slobodni parametri:

$$x = \lambda \quad ; \quad z = \mu$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{r}} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}} + \mu \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

ZAD: Odredi parametarski oblik ravnine

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$x = 5 + 2\lambda - 3\mu$$

$$y = \lambda$$

$$z = \mu$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⇒ UDALJENOST TOČKE OD RAVNINE:

↳ imamo ravninu:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

↳ imamo točku i njezinu projekciju na ravninu: $T_1(x_1, y_1, z_1)$

$T'(x', y', z')$

↳ $\overrightarrow{T'T_1}$ je kolinearan s normalom ravnine!

$$\overrightarrow{T'T_1} = (x_1 - x')\vec{i} + (y_1 - y')\vec{j} + (z_1 - z')\vec{k}$$

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

↳ stoga, za duljinu vektora $\overrightarrow{T'T_1}$ slijedi:

$$\left|\overrightarrow{T'T_1}\right| = \left|\overrightarrow{T'T_1} \cdot \hat{n}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{T'T_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| =$$

$$= \left|\frac{A(x_1 - x') + B(y_1 - y') + C(z_1 - z')}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| =$$

$$= \frac{|A(x_1 - x') + B(y_1 - y') + C(z_1 - z')|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

⇒ KUT IZMEĐU DVIJE RAVNINE:

↳ kut između dvije ravnine jednak je kutu što ga zatvaraju normale tih ravnina

$$\varphi = \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 180° - \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$$

↳ zato imamo apsolutnu vrijednost u sljedećoj formuli:

$$\cos\varphi = |\cos\sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

↳ ako raspišemo:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

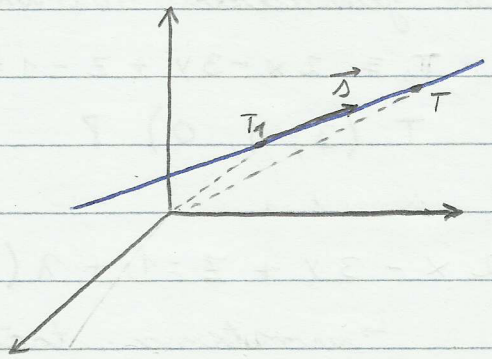
⇒ DIGRESIJA O PRAVCU:

↳ pravac je određen vektorom i točkom

$$\overrightarrow{T_1T} = \lambda \cdot \vec{s}$$

$$\vec{r}_T - \vec{r}_1 = \lambda \cdot \vec{s}$$

$$\boxed{\vec{r}_T = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{s}}$$



↳ vektorska jednadžba pravca

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (s_1, s_2, s_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda \cdot s_1 \\ y &= y_1 + \lambda \cdot s_2 \\ z &= z_1 + \lambda \cdot s_3 \end{aligned}}$$

$$\lambda = \frac{x - x_1}{s_1} \; ; \; \lambda = \frac{y - y_1}{s_2} \; ; \; \lambda = \frac{z - z_1}{s_3}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{s_1} = \frac{y - y_1}{s_2} = \frac{z - z_1}{s_3}}$$

↳ kanonska jednadžba pravca

⇒ PRAMEN RAVNINA:

Pr: Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi presječnicom ravnina $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$; $\pi_2 \equiv x - y + 2z - 3 = 0$ i točkom $T(3, 1, 0)$?

$$2x - 3y + z - 1 + \lambda(x - y + 2z - 3) = 0$$

↳ uvrstimo točku T

$$6 - 3 + 0 - 1 + \lambda(3 - 1 + 0 - 3) = 0$$

$$\lambda = 2$$

↳ vratimo s λ gore i imamo:

$$4x - 5y + 5z - 7 = 0$$

$\pi_1 \ldots\ 2x - 3y + z - 1 = 0$

$\pi_2 \ldots\ x - y + 2z - 3 = 0$

$2x - 3y = 1 - z$

$x - y = 3 - 2z$

$-y = -5 + 3z$

$y = 5 - 3z$

$x = 8 - 5z$

$x = 8 - 5z$

$y = 5 - 3z$

$z = \lambda$

$x = 8 - 5\lambda$

$y = 5 - 3\lambda$

$z = \lambda$

$$\frac{x-8}{-5} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-0}{1}$$

ZAD: Odredi parametar λ tako da pravac odreden sa $3X + Y - Z + \lambda = 0$; $2X - 2Y + Z + 1 = 0$ sijece os X.

$T_0(X_0, 0, 0)$; $T_0 \in p$; $p = \pi_1, \pi_2$

$$\left.\begin{aligned} 3X_0 + \lambda &= 0 \\ 2X_0 + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad X_0 = -\frac{1}{2} \qquad \lambda = \frac{3}{2}$$

ZAD: Odredi projekciju točke $T(2, 4, 3)$ na pravac koji je zadan $p \equiv x = t, \; y = -2t + 1, \; z = 2t - 2$.

$\vec{c}_p = (1, -2, 2)$

$\pi \ldots (x - 2) - 2(y - 4) + 2(z - 3) = 0$

$x - 2y + 2z = 0$

$t - 2(-2t + 1) + 2(2t - 2) = 0$

$t + 4t + 4t - 2 - 4 = 0$

$t = \frac{2}{3}$ $\longrightarrow$ uvrsti u pravac

$T_N\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

UDALJENOST PRAVACA U PROSTORU

⇒ tri slučaja:

- ↳ pravci su mimoilazni
- ↳ pravci se sjeku
- ↳ pravci su paralelni

$$d(p_1, p_2) = \frac{V_{paralelepipeda}}{P_{paralelograma}} = h_{visina\ paralelepipeda}$$

↳ vidi dokaz u knjizi na str. 19

PR: Odred točku N simetričnu točku $M(1,1,1)$ s obzirom na ravninu $\pi \equiv x+y-2z-6=0$!

$$\vec{n} = (1, 1, -2)$$

$$x = 1 + 1\lambda$$
$$y = 1 + 1\lambda$$
$$z = 1 - 2\lambda$$

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) - 2(1-2\lambda) = 6$$

$$6\lambda = 6 \quad \Rightarrow \lambda = 1$$

$$M'(1+\lambda, 1+\lambda, 1-2\lambda)$$

$$M'(2, 2, -1)$$

$$\frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(a,b,c) = (2,2,-1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(1+a) &= 2 \\ \frac{1}{2}(1+b) &= 2 \\ \frac{1}{2}(1+c) &= -1 \end{aligned}\right\} N(3,3,-3)$$

ZAD: Izračunaj kut između pravaca:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{-7} \quad ; \quad \frac{x+6}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 1 + a \\ y = 0 - 2a \\ z = 4 - 7a \end{cases} \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = -6 + 5b \\ y = 2 + b \\ z = 3 + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 + a &= -6 + 5b \\ -2a &= 2 + b \\ 4 - 7a &= 3 + b \end{aligned}$$

↳ ako ovaj sustav nema rješenja, pravci se ne sjeku

$$a = -7 + 5b$$

$$\vdots$$

$$b = \frac{12}{11} \quad \Rightarrow \quad a = -7 + \frac{60}{11}$$

↳ uvrstimo u 3 jednadžbu i dobijemo:

$$163 \neq 45$$

ZADATAK 35

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 3x + y - z + \beta = 0 \end{array}\right\} \pi \qquad x + 2y - z - 2 = 0$$

$$x - 2y + z + 1 + \lambda(3x + y - z + \beta) = \mu(x + 2y - z - 2)$$

$$x(1 + 3\lambda) + y(\lambda - 1) + z(1 - \lambda) + 1 + \lambda\beta = (x + 2y - z - 2)\mu$$

$$1 + 3\lambda = \mu$$
$$\lambda - 2 = 2\mu$$
$$1 - \lambda = -\mu$$
$$1 + \lambda\beta = -2\mu$$

$$2 + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$$

$$\mu = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \beta = 4 \\ -1 - 2 = -4 \end{array}\right\} \quad 2 = 3$$

$$\beta = -3$$

ZADATAK 45

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{m} = \frac{z}{2}$$

$$\pi_1 \equiv x + 2y - 1 = 0$$

$$\pi_2 \equiv x - 2z + 2 = 0$$

$$x = \lambda$$

$$y = \frac{1-\lambda}{2}$$

$$z = \frac{2+\lambda}{2}$$

$$(3, m, 2) \cdot (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$3 - \frac{m}{2} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 8$$

ZADATAK 38

$$p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$\pi_1 \equiv 3x + y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi_2 \equiv x + 2y + 3z + 1 = 0$$

$$x = 1 + 2\lambda$$

$$y = -1 + 2\lambda$$

$$z = 0 - \lambda$$

$$\frac{|3 + 6\lambda + 2\lambda - 1 - 2\lambda - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|1 + 2\lambda - 2 + 4\lambda - 3\lambda + 1|}{\sqrt{14}}$$

$$|6\lambda + 1| = |3\lambda|$$

$$6\lambda + 1 = \pm 3\lambda$$

$$\lambda = -\frac{1}{9}$$

$$\lambda = -\frac{1}{3}$$

ZADATAK 51 $p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ $\pi \equiv -2y + z + 5 = 0$

$x = 1 + \lambda$

$y = 2\lambda$

$z = -1 + \lambda$

$-2 \cdot 2\lambda + (-1 + \lambda) + 5 = 0$

$\lambda = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ probodište: $P\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$T(1, 0, -1)$

↳ sada nađi pravac normale na ravninu kroz točku T i odredi pomoću aritmetičke sredine točku simetričnu točki T

ZADATAK 55 $T(2, 0, 1)$ $p_1 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$

os OY

$\pi \ldots \begin{cases} T(2, 0, 1) \\ x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

$x = 2 + \lambda$

$y = 1 + 2\lambda$

$z = -1 + \lambda$

$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$2 + \lambda - 2(\lambda - 1) = 0$

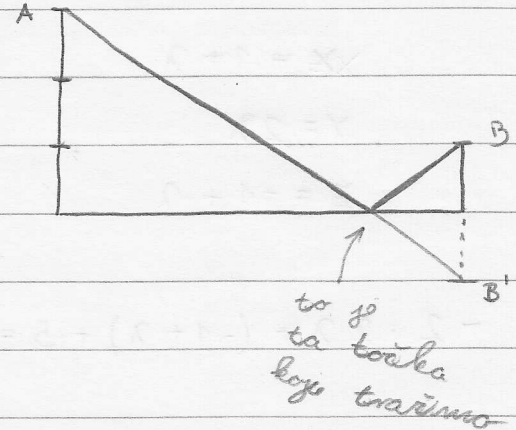
$\lambda = 4$

$x - 2z = 0$

$M(6, 9, 3)$

↳ sada imamo pravac kroz T i M

ZADATAK 60 $A(2, 1, 3)$ $B(-2, 4, 1)$



EUKLIDSKI PROSTOR R^m

$R^m \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in R\}$ = skup uredenih n-torki

$$\boxed{(x \mid y)^2 \leq (x \mid x)(y \mid y)}$$

↳ ZNAŠ DOKAZ ?

⇒ vektorski prostor koj ima definiran skalarni produkt naziva se UNITARNI PROSTOR

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$$

unitarni prostor — normiran prostor — metrički prostor

⇒ udaljenost dvije točke: $T_1(x_1, x_2, x_3)$ $T_2(y_1, y_2, y_3)$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x-y \mid x-y)} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2) + (x_3-y_3)^2}$$

⇒ OSKULATORNA RAVNINA:

↳ ravnina u kojoj leže brzina i akceleracija

↳ jednadžba: $T(x_0, y_0, z_0)$

$$\underbrace{(\vec{v} \times \vec{a})}_{\text{vektor normale}} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

PRIMJER 10

$$\mathcal{C} \ldots \begin{cases} x = y^2 \\ z = x^2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C} \ldots \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \\ z = t^2 \end{cases}$$

$$\vec{r} = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t\right) \qquad T(1, 1, 1)$$

$$\vec{r}_T = \left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$$

⇒ ovisno o parametru koj uzmemo, možemo dobit manju/veću brzinu od one koju bi mogli dobiti da parametriziramo na drug način

⇒ stoga, krivulje ne moramo nužno gledat kao mrtav skup točaka, već ih možemo promatrat i s brzinom (i akceleracijom) izvode same krivulje što je zapravo gibanje točke u prostoru po nekoj zakonitosti

ZADATAK 1

$$r(t) = \vec{i} - 4t^2\vec{j} + 3t^2\vec{k} = (1, -4t^2, 3t^2)$$

↳ vidimo da je $x = 1$, što znači da krivulja živi u toj ravnini

$$\left.\begin{aligned} y &= -4t^2 \\ z &= 3t^2 \end{aligned}\right\} \quad t^2 = \frac{y}{-4}$$

$$t^2 = \frac{z}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y}{-4} = \frac{z}{3} \Rightarrow 3y + 4z = 0$$

↳ pravac koji leži u ravnini $x = 1$

↳ kanonski oblik:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{-4} = \frac{z-0}{3}$$

$$v(t) = r'(t) = (0, -8t, 6t)$$

ZADATAK 5 $r(t) = e^t(\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k})$

$$r'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2 + e^{2t}} = e^t\sqrt{3}$$

$$\hat{r}'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t,\ \sin t,\ 1)$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{k}\cdot\hat{r}'(t)}{1+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ZADATAK 6 $r(t) = \left(\frac{1}{4}t^4,\ \frac{1}{3}t^3,\ \frac{1}{2}t^2\right)$

$$r'(t) = (t^3,\ t^2,\ t)$$

$$\vec{n} = (1,\ 3,\ 2)$$

$$\vec{n}\cdot r'(t) = t^3 + 3t^2 + 2t = 0$$

$$t(t^2 + 3t + 2) = 0$$

$$t_1 = 0\ ,\quad t_2 = -1\ ,\quad t_3 = -2$$

FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

⇒ do sada smo gledali funkcije:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

↳ to su vektorske funkcije

⇒ sada, proučavamo ove funkcije:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

↳ to su funkcije više varijabli

⇒ najlakši graf koji možemo prikazati grafički je graf funkcije dvije varijable (domena je u ravnini „X", „Y", a vrijednost se nalazi na „Z" osi)

PRIMJER 12 e) $u = \arccos x + \sqrt{1-y^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{1-z^2}$

1) $x \in [-1, 1]$

2) $1 - y^2 \geq 0 \qquad y^2 \leq 1 \qquad y \in [-1, 1]$

3) $1 - z^2 \geq 0 \qquad z^2 \leq 1 \qquad z \in [-1, 1]$

↳ D_f = kocka brida 1 oko ishodista

g) $u = \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(x^3+y^2+z\right)\right) + \ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{y^4+z^6+1}$

1) $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\underbrace{(x^3+y^2+z)}_{\varepsilon \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \varepsilon [-1, 1]$

$\varepsilon \langle -1, 1 \rangle$

2) $x^2+x+1 > 0 \qquad \forall x$

3) $y^4+z^6+1 \neq 0 \qquad \forall x$

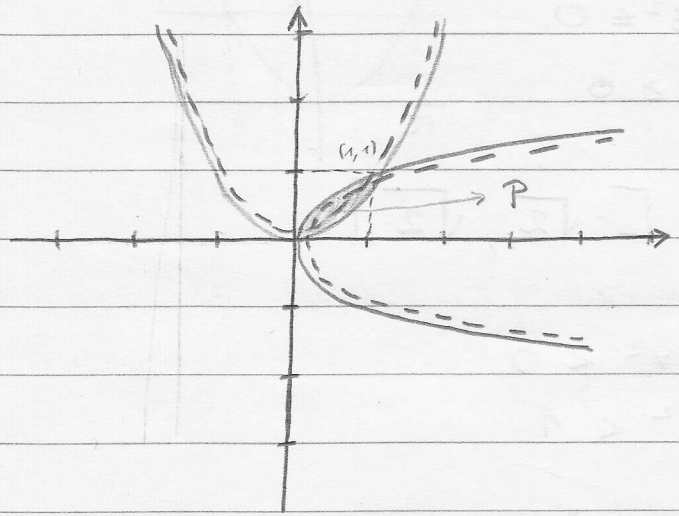
ZADATAK 8 $f(x,y) = \sqrt{\ln^2(y-x^2) + \ln^2(x-y^2)}$

1) $y - x^2 > 0$

2) $x - y^2 > 0$

$y > x^2$

$x > y^2$



$$P(D_f) = |D_f| = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ZADATAK 9

a) $f(x,y,z) = \arccos(1-z^2) + \ln(2x - x^2 - y^2)$

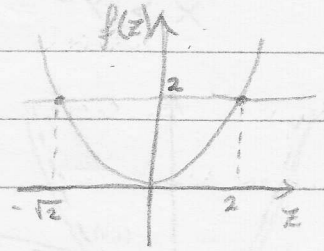
1) $1 - z^2 \in [-1, 1]$

2) $2x - x^2 - y^2 > 0$

$-1 \leq 1 - z^2 \leq 1$

$-2 \leq -z^2 \leq 0$

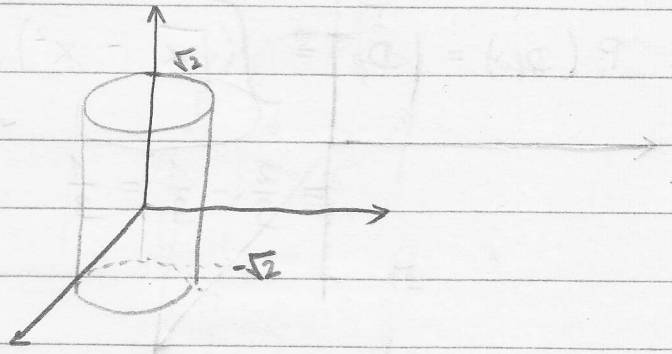
$2 \geq z^2 \geq 0$



$z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$x^2 - 2x + y^2 < 0$

$(x-1)^2 + y^2 < 1$



PLOHE DRUGOG REDA

⇒ ovo gradivo pročitaj u knjizi počevši od stranice 18

1) VALJKASTE PLOHE
2) STOŽASTE PLOHE
3) ROTACIJSKE PLOHE:

a) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

↳ dvoplošni hiperboloid

b) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

↳ jednoplošni hiperboloid

⇒ zapamti da stožac svugdje ima kvadrate, al nema konstantu:

$z^2 = x^2 + y^2$ ⇒ stožac

$z^2 = x^2 + y^2 - 1$ ⇒ hiperboloid

NIVO KRIVULJE I NIVO PLOHE

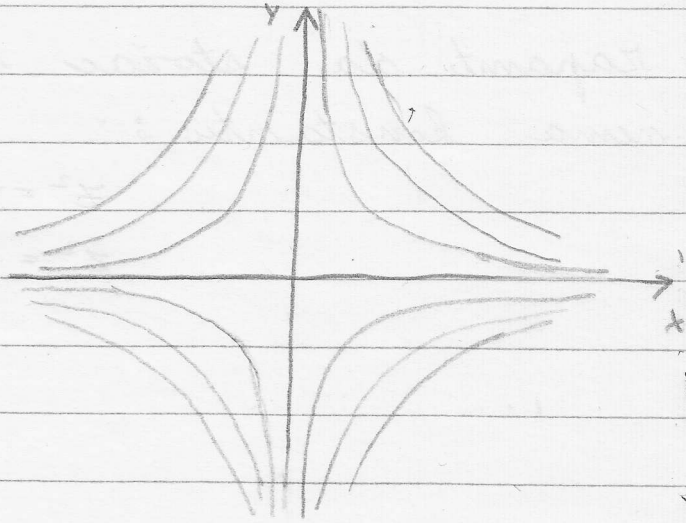
⇒ nivo krivulje su zapravo izohipse
↳ crte koje prikazuju mjesta isto „visine" u odnosu na neku plohu
↳ dobijemo ih presjecanjem nekog grafa ravninom paralelnom sa ŽELJENOM plohom

ZAD: Odredi nivo - krivulje funkcije $z = xy$?

$z \Rightarrow C = 0 \Rightarrow xy = 0$ → koordinatne osi

$C = 1 \Rightarrow xy = 1$

$C = 2 \Rightarrow xy = 2$



DIFERENCIJALNI RAČUN

FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI

⇒ funkcija f u nekoj točki neprekidna ako vrijedi:

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

ZADATAK 3

1°) $m = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ x^2+y^2 = r^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi\in[0,2\pi\rangle}} \frac{r^2\cos\varphi}{r} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi\in[0,2\pi\rangle}} r\cos\varphi = 0$$

2°) $m = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi\in[0,2\pi\rangle}} \frac{r^2\cos\varphi}{r^2} = \cos\varphi$$

↳ nema limesa jer se vrijednost samog limesa mijenja o izboru kuta „φ"

ZADATAK 4

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3+x^2y}{x^2+y^2} \overset{!}{=} \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi\in[0,2\pi\rangle}} \frac{r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi + r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} r\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi\right) = 0$$

$$a = 0$$

PARCIJALNE DERIVACIJE

ZADATAK 6

$$f(x, y, z) = \ln(xy + z) \qquad T(1, 2, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{xy+z} \cdot y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy+z} \cdot x \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{xy+z}$$

↳ uvrstimo samo točku

⇒ GRADIJENT - vekto koj sadrži sve parcijalne derivacije

⇒ NAŠ PUT:

↳ tangencijalna ravnina → gradijent → diferencijabilnost

$$f(x + \Delta x) - f(y + \Delta y) = (\nabla f(x) \mid (\Delta x, \Delta y)) + o(\Delta x, \Delta y)$$

$$\lim \frac{o}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

↳ jer no cnano dijelit s vektorom!

TEOREM:

↳ ako je „f" diferencijabilna, onda je neprekidna

↳ OBRAT NE VRIJEDI

DOKAZ: ($n=2$)

↳ želim pokazat:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \to 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$

↳ pa krenemo:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = (\nabla f(x,y) \mid (\Delta x, \Delta y)) + \sigma(\Delta x, \Delta y)$$

$$| f(x+\Delta x, y+\Delta y)| = |(\nabla f(x,y) \mid (\Delta x, \Delta y)) + \sigma(\Delta x, \Delta y)|$$

↳ pravilo trokuta:

$$\leq |(\Delta f(x,y) \mid (\Delta x, \Delta y))| + |\sigma(\Delta x, \Delta y)|$$

↳ C S B teorem:

$$|f(x+\Delta x, y+\Delta y)| \leq |\nabla f(x,y)| \cdot |(\Delta x, \Delta y)| + |\sigma(\Delta x, \Delta y)|$$

↳ pustimo na limes:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} |f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)| \le \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \|\nabla f(x,y)\| \cdot |\|(\Delta x,\Delta y)\| + |\|\sigma(\Delta x,\Delta y)\||$$

$\|(\Delta x,\Delta y)\| \to 0$

⇒ NAPOMENA:

↳ neke funkcije imaju parcijalne derivacije, ali one nisu neprekidne

PR°: $f(x,y) = \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

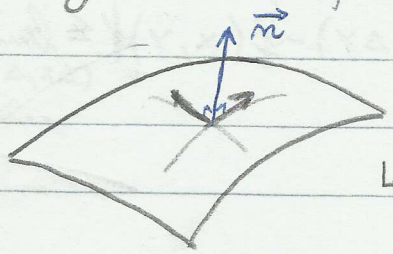
↳ polarne koordinate:

$$\lim_{r\to 0} \frac{2r^4\cos\varphi\sin^3\varphi}{r^4} = 2\cos\varphi\sin^3\varphi$$

ovo je nula samo kad se približavamo po koordinatnim osima ($\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$)

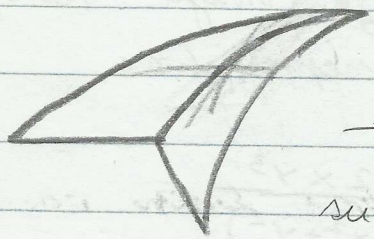
⇒ RIJEČIMA:

↳ parcijalnim derivacijama pokrili smo samo dva smjera diferencijabilnost



↳ $\vec{n}$ određuje tangencijalnu ravninu

↳ što ako je naša ploha prelomljena?



→ parcijalne derivacije su diferencijabilne, ali funkcija nije, pa smo rato trebali gradijent i kremuli dokazivat sve one teoreme (VIDI KNJIŽICU)

$\underbrace{df(T)}_{\text{linearna funkcija koja najbolje aproksimira moju funkciju u točki } T}\underbrace{(H)}_{\text{argument}}$

⇒ druge oznake:

1°) $df_T(H)$

2°) $df(T)$

⇒ stoga je najčešće:

$$df(T) = \frac{\partial f}{\partial x}(T)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(T)\,dy$$

ZADATAK 13

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2}$$

$$df(1,1) = \frac{1}{y_2}(1,1)\,dx + (-2)\frac{x}{y^3}(1,1)\,dy$$

→ nije, baš ljepi zapis, pa je lakše računati gradijent

ZADATAK 12

$$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{x\cdot z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y = -\frac{y\,z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

u toč. $(3,4,5)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3}{25}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4}{25}$$

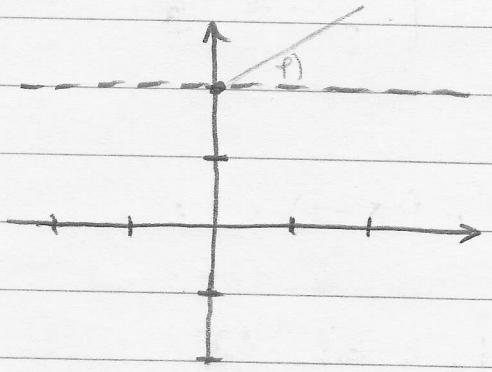
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{5}$$

⇒ pisanje diferencijala brez odklona:

$$u(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xy \end{aligned}\right\} \quad du = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

ZA D: Prejeti na polarne koordinate v točki $T(0,2)$ za funkcijo $f(x,y) = \frac{\sin(x \cdot y)}{x}$!



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = 2 + r\sin\varphi$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r\cos\varphi \cdot (2 + r\sin\varphi))}{r\cos\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin(2r\cos\varphi + r^2\cos\varphi\sin\varphi)}{r\cos\varphi} = \dots$$

$$= \lim_{r\to 0} \left(2 + \frac{r\sin 2\varphi}{\cos\varphi}\right) = 2$$

⇒ gradijent je vektor, a diferencijal je funkcija no oni su isprepleteni (gotovo analogni)

ZADATAK 24

$$z = \frac{24}{x \cdot y} \; ; \; A(4, 3, 2)$$

↳ trebamo vektor normale:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{24}{xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{24}{xy^2} \end{aligned}\right\} \text{ za točke: } \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{2}{3} \end{aligned}\right.$$

$$-\frac{1}{2}(x-4) - \frac{2}{3}(y-3) - (z-2) = 0$$

$$3(x-4) + 4(y-3) + 6(z-2) = 0$$

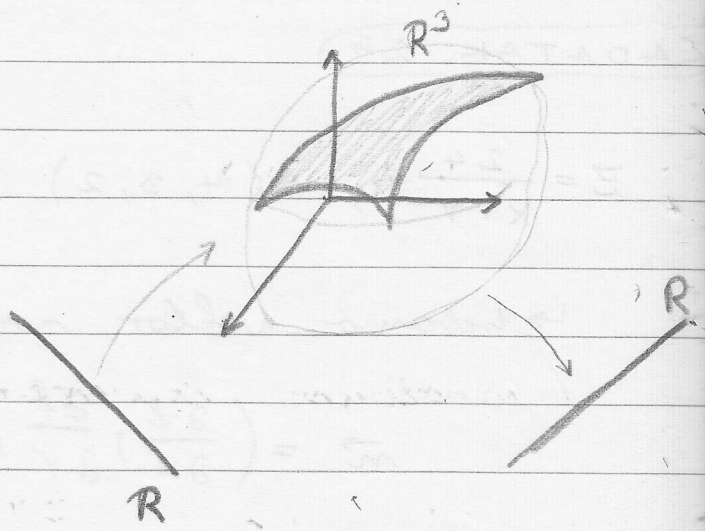
$$3x + 4y + 6z - 36 = 0$$

DERIVACIJA SLOŽENE FUNKCIJE

$\vec{r}(t): \quad R \longrightarrow R^3$

$f(x,y,z): \quad R^3 \longrightarrow R$

$(f \circ \vec{r}): \quad R : R$



⇒ formula za račun derivacije kompozicije vrijedi i ovdje:

$$(f \circ \vec{r})'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

↳ Leibnitzova notacija:

$$\boxed{\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{dy}{dt}}$$

PRIMJER 8 $u = x^2 - y^2$

$v = xy$

množimo matrica

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

↳ ako želimo „dx" i „dy", onda množimo inverznom matricom:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

inverznu matricu najčešće računa računalo, a ne mi sami

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

ZADATAK 8

$$Z = u^2 v$$
$$u = \cos(xy)$$
$$v = x\sqrt{y}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = ?$$

$$dZ = 2uv\,du + u^2\,dv$$

↳ matrično: $\begin{bmatrix} 2uv & u^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -\sin(xy)y & -\sin(xy)x \\ \sqrt{y} & \frac{x}{2\sqrt{y}} \end{bmatrix} \begin{cases} du = -\sin(xy)\cdot y\,dx - \sin(xy)\,x\,dy \\ dv = \sqrt{y}\,dx + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \end{cases}$$

TEOREM 3

$$dZ = 2uv\left[-y\sin(xy)\,dx - x\sin(xy)\,dy\right] + u^2\left[\sqrt{y}\,dx + \frac{x}{2\sqrt{y}}\,dy\right]$$

$$dZ = \underbrace{\left[-2uvy\sin(xy) + u^2\sqrt{y}\right]}_{\frac{\partial Z}{\partial x}}dx + \underbrace{\left[-2uvx\sin(xy) + u^2\cdot\frac{x}{2\sqrt{y}}\right]}_{\frac{\partial Z}{\partial y}}dy$$

↳ samo uvrstimo „u" i „v" i uzmemo van ono što želimo - u našem slučaju to je $\frac{\partial Z}{\partial x}$

ZADATAK 10 b)

$$f(t) = (\ln t)^{\operatorname{tg} t}$$

$$z = x^y \quad \Rightarrow \quad x(t) = \ln t$$
$$y(t) = \operatorname{tg} t$$

$$f'(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$f'(t) = y \cdot x^{y-1} \cdot \frac{1}{t} + x^y \ln(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$f'(t) = \frac{\operatorname{tg} t \, (\ln t)^{\operatorname{tg} t - 1}}{t} + \frac{(\ln t)^{\operatorname{tg} t} \cdot \ln(\ln t)}{\cos^2 t}$$

ZADATAK 11

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x = R\cos\varphi\cos\psi$$

$$y = R\cos\varphi\sin\psi$$

$$z = R\sin\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\varphi} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \Phi'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x\cdot(-R\sin\varphi\cos\psi) +$$

$$+ \Phi'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2y\cdot(-R\sin\varphi\sin\psi) +$$

$$+ \Phi'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2z\,(R\cos\varphi)$$

↳ izlučimo kako Φ nebi imao utjecaja

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -2R\,\Phi'(x^2+y^2+z^2)\left[x\sin\varphi\cos\psi + y\sin\varphi\sin\psi - z\cos\varphi\right]$$

↳ sada uvrstimo „x", „y" i „z" i vidimo da ćemo dobit faktor koj je nula

USMJERENA DERIVACIJA

$$t \longmapsto \begin{cases} x = x_0 + \Delta \cdot h_{01} \\ y = y_0 + \Delta \cdot h_{02} \end{cases} \longmapsto f(x, y)$$

parametorska jednadžba

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

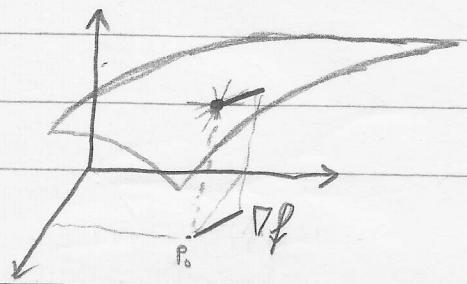
↳ prihvatiti da kad deriviramo „x" i „y" dobijemo „h_{01}" i „h_{02}" što su nam zapravo nagibi tangente

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{h_0}} \qquad \vec{h_0} = \frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}$$

⇒ kad treba odredit u kojem smjeru funkcija najbrže raste, pristupi ovako:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \nabla f(P_0) \cdot h = \|\nabla f(P_0)\| \cdot \|h\| \cdot \cos\varphi$$

↳ $\cos\varphi$ je maksimalan kad je kut jednak nul - stoga, najbrži rast je u smjeru gradijenta



ZADATAK 15

$u(x, y, z) = x^2 + y^2 - xyz$

$T_0(1, 1, 0)$; $T_1(0, 0, 1)$

$\vec{s}(-1, -1, 1)$

$$\vec{s_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$$

$$\nabla u(1, 1, 0) = \left(2x - yz,\ 2y - xz,\ -xy\right)_{T_0}$$

$$= (2, 2, -1)$$

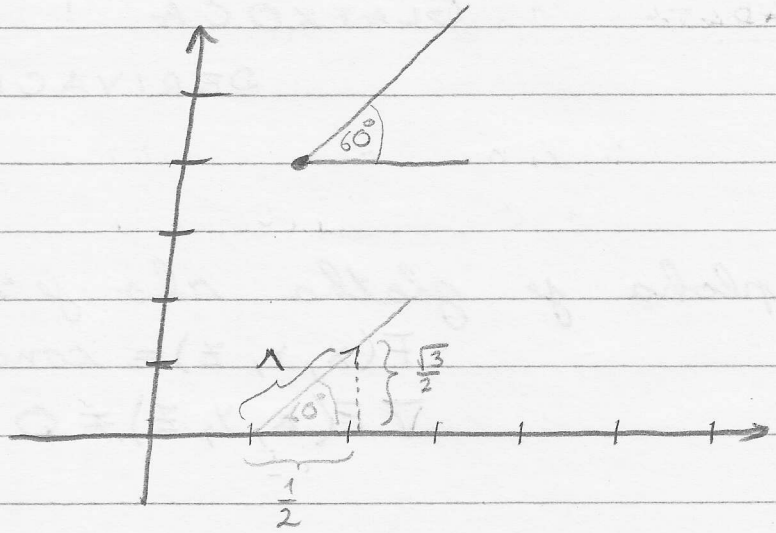
$$\frac{\partial u}{\partial s}(1, 1, 0) = (2, 2, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1) = -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

ZADATAK 16

$f(x, y) = \sqrt{xy}$

$P(1, 4)$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$



$$\vec{h_0} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$$

Integrali ovisni o parametru ; ZA SRIJEDU

GLATKOĆA I USMJERENA DERIVACIJA

⇒ ploha je glatka ako je:

$$F(x, y, z) = const$$

$$\nabla F(x, y, z) \neq 0$$

PRIMJER 13

$$f(x, y) = x^2 - y^4$$

$$A(2, 1)$$

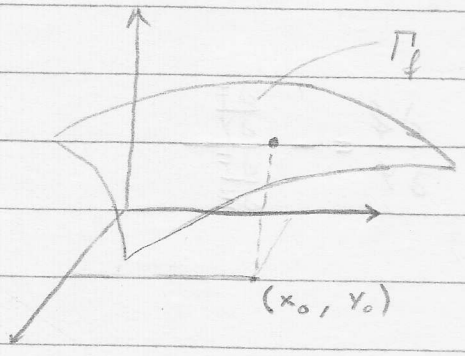
$$\nabla F = (2x, -4y^3)$$

$$F(x, y) = 3$$

$$4(x-2) - 4(y-1) = 0$$

TANGENCIJALNA RAVNINA NA GRAF FUNKCIJE I NA PLOHU

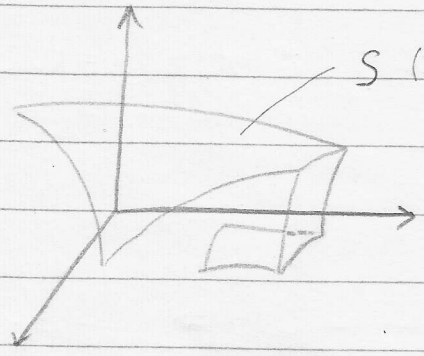
a) na graf funkcije:



$$z = f(x, y)$$

$$\pi_T \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - \left(z - f(x_0, y_0)\right) = 0$$

b) na plohu:



$$F(x, y, z) = 0$$

$$\pi_T \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

↳ ako iz jednadžbe na plohu pokušamo dobiti jednadžbu na graf funkcije, trebamo podijeliti s članom:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

↳ iz toga slijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

IMPLICITNO ZADANA FUNKCIJA

⇒ u ovom poglavlju, pokušat ćemo funkciju tretirat kao plohu i obratno

↳ stoga, vidjet ćemo da je tangenta zapravo lokalno svojstvo

PR: $x^2+3xy+4y^2=7$

↳ krenemo kao u prvom semestru:

$$2x+3y_x'+8y\cdot y_x'=0$$

$$y_x' = -\frac{2x+3y}{3x+8y}$$

$2x+3y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$

$3x+8y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$

PR: $f(x,y)=0$ → krivulja koju poparametriziramo:

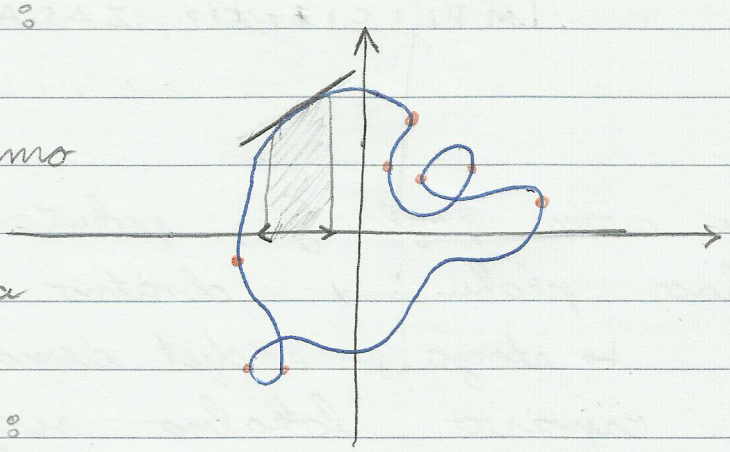
$$x=t \;;\quad y=\varphi(t)$$

$$f(t,\varphi(t))=0 \;/\,'t$$

$$\nabla f(x,y)\cdot(1,\varphi'(t))=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\varphi'(t)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi'(t)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

⇒ mi radimo ovo:



↳ želimo da imamo interval na kojem se krivulja ponaša kao funkcija

↳ to vrijedi ako je:

$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ kako bi vrijedilo

$$\varphi_x'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

↳ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ je u crvenim točkama

⇒ stavimo ovo u 3 dimenzije:

$$F(x, y, z) = 0 \quad ; \quad F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

↳ parcijalno po x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

↳ parcijalno po y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

ZAD: Funkcija $z = z(x,y)$ zadana je implicitno!
$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 3y + 7 = 0$. Nadite gradijent od z u točki $T(1,0,-2)$

$F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 3y + 7$

↳ vidimo da je točka T element plohe

$\frac{\partial z}{\partial x} = ?$; $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

↳ prvo trebamo:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz$ | $T(1,0,-2)$ $= 3$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2 - 3xz - 3$ $= 3$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$ $= 12$

↳ sada računamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{6y^2 - 3x^2 - 3}{3z^2 - 3xy} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$\nabla z(1,0,-2) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

ZAD: $-\ln(1+x_1^2+x_4^2) + x_1 x_2 x_3 + e^{x_3^2+x_4^2} = 1$

↳ točka je $(1, 2, 0, ?)$

↳ želmo izračunati: $\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}$

$$-\ln(1+1+4) + 0 + e^{x_4^2} = 1$$

$$x_4^2 = \ln(1+\ln 6)$$

$$x_4 = \pm\sqrt{\ln(1+\ln 6)}$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_4}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} \cdot 2x_1 + x_2 x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_4} = e^{x_3^2+x_4^2} \cdot 2x_4$$

$T(1, 2, 0, x_0)$

$$= -\frac{2}{1+1+4} = -\frac{1}{3}$$

$$= e^{\ln(1+\ln 6)} \cdot 2\left[\pm\sqrt{\ln(1+\ln 6)}\right]$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = -\frac{-\frac{1}{3}}{\pm 2(1+\ln 6)\sqrt{\ln(1+\ln 6)}}$$

ZADATAK 3 $F(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + z^2 - 1$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y \quad ;$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x \quad ;$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z \quad ;$

⇒ radane točke su nam izvan plohe:

$T_1(0, 0, 2) \quad T_2(1, 1, 2)$

↳ jednadžba tangencijalne ravnine:

$$(2x_0 + y_0)(x - x_0) + (2y_0 + x_0)(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

idemo jednadžbu s točkama: (jed)

$T_1(0, 0, 2) \Rightarrow (2x_0 + y_0)(0 - x_0) + (2y_0 + x_0)(0 - y_0) + 2z_0(2 - z_0) = 0$

$T_2(1, 1, 2) \Rightarrow (2x_0 + y_0)(1 - x_0) + (2y_0 + x_0)(1 - y_0) + 2z_0(2 - z_0) = 0$

↳ sada imamo sustav jednadžbi:

$$x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 + z_0^2 = 1$$

$$-2x_0^2 - x_0 y_0 - 2y_0^2 - x_0 y_0 + 2z_0(\dots) = 0$$

$$-2x_0^2 - x_0 y_0 - 2y_0^2 - x_0 y_0 + 2x_0 + y_0 - 2y_0 + x_0 + 2z_0(\dots) = 0$$

$$3x_0 + 3y_0 = 0$$

$$x_0 + y_0 = 0$$

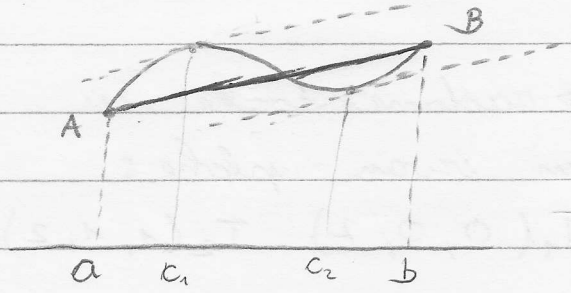
$$x_0 = -y_0 //$$

→ uvrstimo u treću i dobijemo:

$$x_0^2 + z_0^2 = 1$$

↳ sada se vrati u (jed)

TEOREM SREDNJE VRIJEDNOSTI



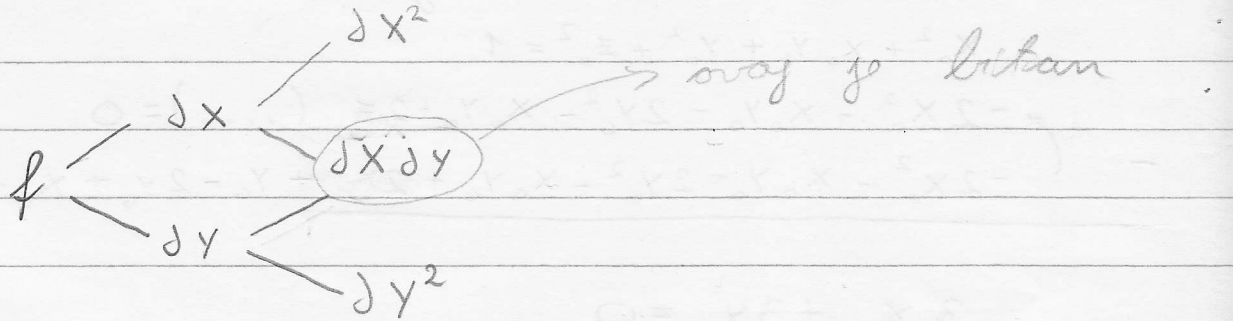
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

nagib pravca kroz A i B

⇒ ŠTO NAM DALJE SLIJEDI?

↳ želimo dobit Taylorovu formulu drugog stupnja kako bi mogli odredit ekstreme neke funkcije

↳ znamo da nam druga derivacija govori o karakteru ekstrema



DERIVACIJE VIŠEG REDA

⇒ Schwarcov teorem:

↳ $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

↳ Dokaz ne treba ☺

ZADATAK 15

$$z(x, y) = \sin(xy) \quad ; \quad T(1, \pi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy)$$

∂x: $-y^2\sin(xy)$ → ∂x: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$; ∂y: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$

∂y: $\cos(xy) - xy\sin(xy)$ → ∂x: $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$; ∂y: $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy)$$

∂x: $\cos(xy) - xy\sin(xy)$ → ∂x: $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$; ∂y: $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

∂y: $-x^2\sin(xy)$ → ∂x: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$; ∂y: $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

TAYLOROVA FORMULA

$$f(x+H) \approx f(x) + \nabla f(x) \cdot H \quad ;$$

diferencijal

$$[df(x)](H) \qquad H = (\Delta X, \Delta Y)$$

$$df_x(H)$$

↳ linearni operator

DRUGI DIFERENCIJAL

$n = 1$

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2$$

drugi diferencijal

$\Rightarrow$ gradijent nam više ne vrijedi jer ima 2 diferencijal vektora?

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

PARCIJALNE DERIVACIJE IMPLICITNO ZADANE FUNKCIJE

ZADATAK 21

$$x + 2y + z + e^z = 1$$

$$\underline{z = z(x, y)}$$

$$\partial^2 z(0,0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0)\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)\,dy^2$$

$$F(x, y, z) = x + 2y + z + e^z - 1$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 1 + e^z \end{aligned}\right|_{T(0,0,0)} \begin{aligned} &= 1 \\ &= 2 \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \end{aligned}\right|_{T(0,0,0)} \begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1+e^z}$$

$$\partial x: \quad = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+e^z}\right) = -\frac{0 - 1(1+e^z)'_x}{(1+e^z)^2} = \frac{e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{(1+e^z)^2}$$

$$= \frac{e^z \cdot \frac{-1}{1+e^z}}{(1+e^z)^2} = -\frac{e^z}{(1+e^z)^3} = -\frac{1}{8}$$

$$\partial y: \quad = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{1+e^z}\right) = \dots = -\frac{e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2} = -\frac{2e^z}{(1+e^z)^3} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{1+e^z}$$

$$\partial x: \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2}{1+e^z}\right) = \dots = -\frac{4e^z}{(1+e^z)^3} = -\frac{1}{2}$$

$$\partial^2(z)(0,0) = -\frac{1}{8}dx^2 - \frac{1}{2}dx\,dy - \frac{1}{2}dy^2$$

ZADATAK 25

d)

$$T_2(z)(1,2,1) = z(1,2) + dz(1,2)(x-1, y-2) + \frac{1}{2} d^2 z(1,2)(x-1, y-2)$$

$$T_2(z)(1,2,1) = z(1,2) + \left[\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,2)(y-2) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2 \right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xyz^2}{2x^2yz} = -\frac{z}{x}$$

∂x: $-\frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x - z}{x^2} = \frac{2z}{x^2}$ $\Big|_{T(1,2,1)} = 2$

∂y: $-\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2xy}$ $\Big|_{T(1,2,1)} = \frac{1}{4}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x^2 z^2}{2x^2yz} = -\frac{z}{2y}$$

∂x: $-\frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2y - z \cdot 2}{4y^2} = \frac{3z}{4y^2}$ $\Big|_{T(1,2,1)} = \frac{3}{16}$

$$dz(1,2) = -dx - \frac{1}{4} dy$$

↳ vrati se u početni polinom:

$$T_2(z)(1,2,1) = 1 - (x-1) - \frac{1}{4}(y-2) + \frac{1}{2}\left[2(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)(y-2) + \frac{3}{16}(y-2)^2 \right]$$

→ možda je negdje greška