TITRANJE

⇒ gibanje koje se periodički ponavlja

⇒ harmoničko titranje proizvodi HARMONIČKA SILA

↳ harmonička sila je svaka sila koja inducira harmoničko titranje

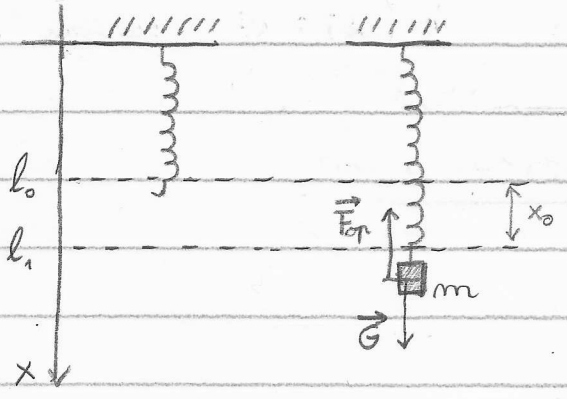
↳ harmonička sila je proporcionalna pomaku od ravnotežnog položaja ($F = k \cdot x$) (zakon spiralne opruge)

↳ uzimamo smjer u obzir:

$$\boxed{\vec{F} = -k \cdot \vec{x}}$$

→ il ovako: $\vec{F} = -\hat{i} \cdot k \cdot \vec{x}$

⇒ harmoničko titranje ćemo izraziti pomoću funkcija sinus i kosinus

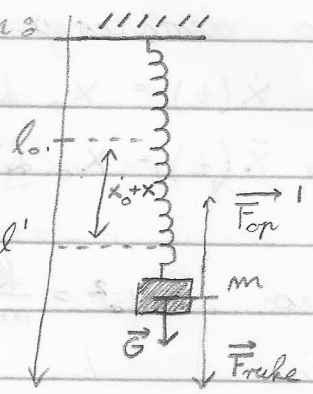


↳ uvjet ravnoteže:

$$\hat{i} \cdot mg + \vec{F}_{op} = 0$$

$$\hat{i} \cdot mg + (-\hat{i}\, k\, x_0) = 0$$

⇒ ako rastegnemo oprugu rukom:



↳ uvjet ravnoteže:

$$\hat{\imath}\, mg + \vec{F}_{op}' + \vec{F}_{ruke} = 0$$

↳ ukinemo silu ruke, pa nastaje titranje:

$$\hat{\imath}\, mg - \hat{\imath}\, k(x + x_0) = \hat{\imath}\, m\ddot{x}$$

(masa · akceleracija)

↳ sada imamo diferencijalnu jednadžbu:

$x(t) = ?$

$\dot{x}(t) = v(t) = ?$

↳ početni uvjeti:

→ početni položaj: $x(0) = A$ ← amplituda

→ početna brzina: $\dot{x}(0) = 0$ (opruga pustimo)

$(v(0) = 0)$

$$\boxed{m\ddot{x} = -k \cdot x + \text{„početni uvjeti"}}$$

$$m\ddot{x} = -k \cdot x \;/\; : m$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

(homogena linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima)

↳ uvedimo probno rješenje oblika:

$$x(t) = x_0\, e^{\lambda t} \qquad (x_0, \lambda = ?)$$

↳ nademo derivacije probnog rješenja:

$$\dot{x}(t) = x_0 \lambda \cdot e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = x_0 \lambda^2 e^{\lambda t}$$

↳ uvedimo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, pa jednadžba izgleda:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

↳ uvrstimo sada probno rješenje:

$$x_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 x_0 e^{\lambda t} = 0 \quad / : x_0 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0$$

↳ naše probno rješenje sada izgleda ovako:

$$x_1(t) = x_1 \cdot e^{-i\omega_0 t}$$

$$\underline{x_2(t) = x_2 e^{i\omega_0 t}}$$

↳ opće rješenje glasi: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$x(t) = x_1 e^{-i\omega_0 t} + x_2 \cdot e^{i\omega_0 t}$$

↳ iz početnih uvjeta trebamo dornat kolki su nam x_1 i x_2

$$x(0) = A = X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 1 \quad / \cdot 1$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -i\omega_0 X_1 + i\omega_0 X_2 \quad / : i\omega_0$$

$$0 = -X_1 + X_2$$

$$X_1 = X_2$$

$$x(0) = A = X_1 + X_2 \quad \Rightarrow \quad 2X_1 = A$$

↳ vratimo se na početak:

$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2} A e^{i\omega_0 t}$$

$$\boxed{x(t) = A \cdot \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}}$$

↳ ovo je razvoj kosinusa, pa možemo pisati:

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega_0 t)}$$

$$\boxed{v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t)}$$

⇒ <u>napomena</u>: za vježbu izvedi jednadžbu titranja uz zadane početne uvjete:

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = -v_0$$

(isto trebamo dobit sinus i kosinus, ali nije potpuno isto)

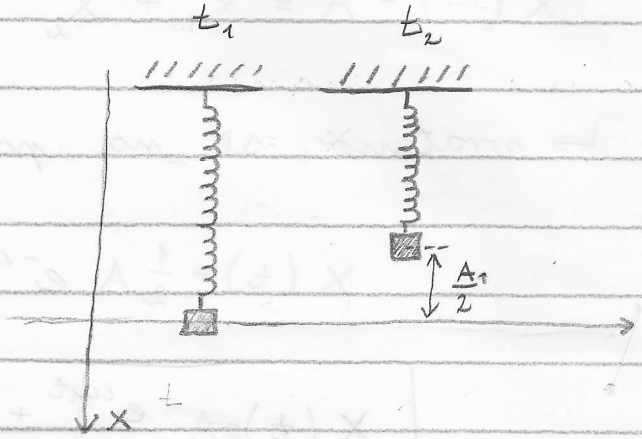
ZAD: Tijelo mase 500 g izvodi harmonijsko titranje. Nakon jedne sekunde tijelo je u ishodištu, a nakon dvije sekunde udaljeno je za pola amplitude od ishodišta u negativnom smjeru. Kolika je konstanta opruge? Vrijeme se mjeri od početka titranja.

$m = 0.5\ kg$

$t_1 = 1\ s$

$t_2 = 2\ s$

$k = ?$



$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(0) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0) = A \quad \rightarrow \text{pretpostavljamo: } \varphi = 0$$

$$x(t_1) = A \cdot \cos(\omega_0 t_1) = A \qquad \omega_0 \cdot T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

($\omega_0 t_1 = 2\pi$)

↳ ovo je bilo opcenito, sada rješimo radatak:

$$x(t_1) = A_1 \cos(\omega_0 t_1 + \varphi)$$

$$\underline{x(t_2) = -\frac{A}{2} = A_1 \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)}$$

$$\omega_0 \cdot 1s + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega_0 \cdot 1s$$

$$A_1 = -\frac{A}{2\omega \cdot 1s\,(\omega_0 \cdot 2 + \frac{\pi}{2} - \omega_0 \cdot 1)}$$

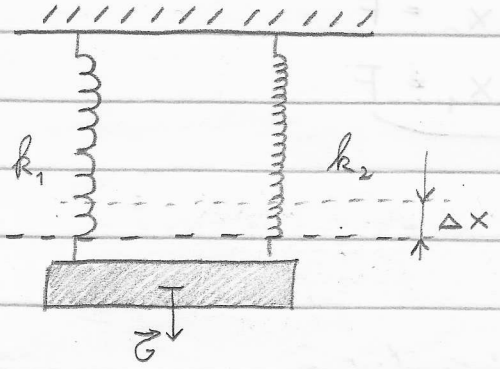
SPAJANJE OPRUGA

⇒ opruga 1 ⇒ k_1

⇒ opruga 2 ⇒ k_2

⇒ načini spajanja:

a) PARALELNO



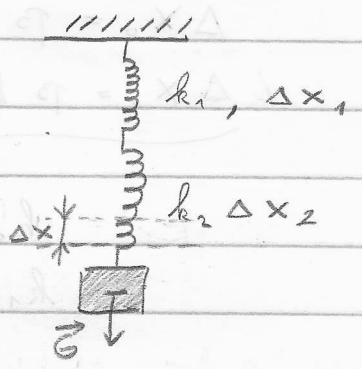
$$\vec{G} + \vec{F}_{op_1} + \vec{F}_{op_2} = 0$$

$$k_1 \Delta x = F_{op_1}$$
$$k_2 \Delta x = F_{op_2}$$
$$G = k_p \cdot \Delta x$$

$$k_p \cdot \Delta x = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x \quad / : \Delta x$$

$$\boxed{k_p = k_1 + k_2}$$

b) SERIJSKI



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$\boxed{\frac{1}{k_\Delta} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

„REZANJE" OPRUGA

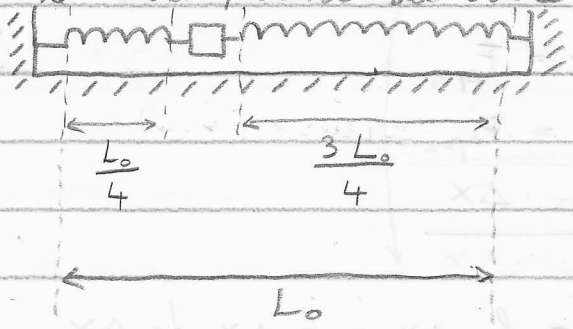
⇒ ako oprugu prerežemo na dvije, dvije opruge će imati veću konstantu nego početna opruga

$\boxed{\Delta x_0 \sim L_0}$ → produljenje opruge je proporcionalno duljini opruge

$$\Delta x_0 = \beta L_0 \qquad k_0 \Delta x_0 = F$$
$$\Delta x_1 = \beta L_1 \qquad k_1 \Delta x_1 = F$$

$$k_0 \beta L_0 = F$$
$$k_1 \beta L_1 = F$$

↳ ovo su jednadžbe za horizontalnu oprugu izgleda (al se može proširit na ostale):

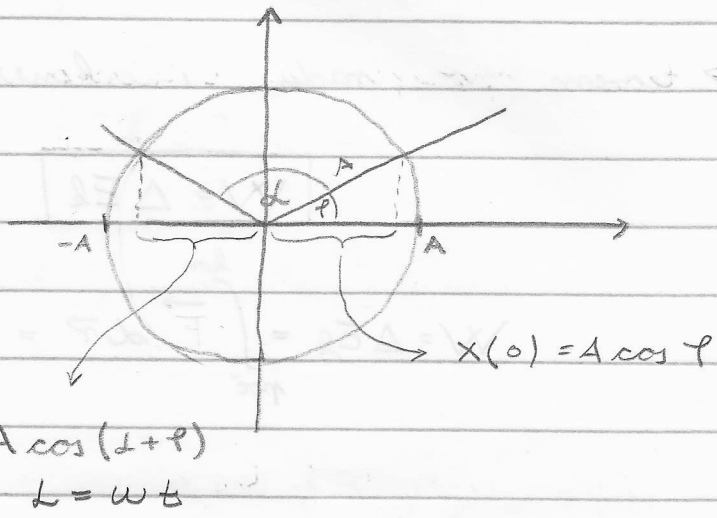


↳ NAPOMENA: ovdje opruge djeluju paralelno !

FAZORI

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$x(0) = A\cos\varphi$



$\overrightarrow{x(t)}$ → faror elongacije

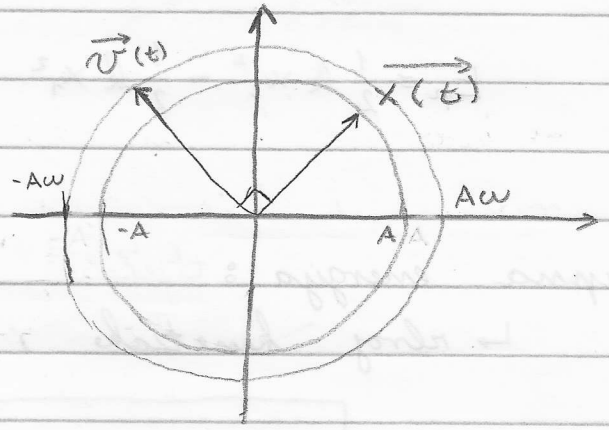
↳ rotira kutnom brzinom ω

↳ pogledajmo sada faror u ovom položaju:

$v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

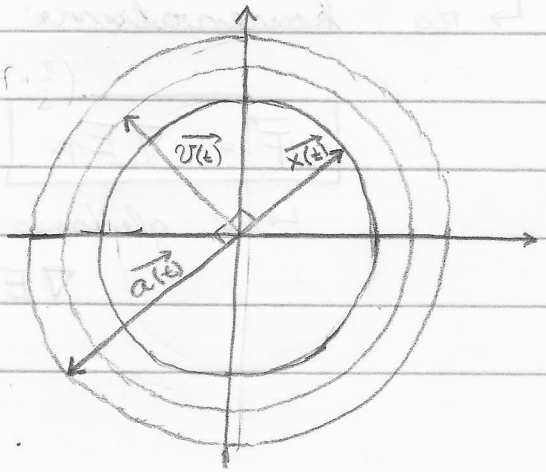


↳ nadalje gledajmo s akceleracijom:

$a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$

$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

$a(t) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$



ENERGIJA KOD TITRANJA

⇒ teorem o radu i kinetičkoj energiji:

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

$$W = \Delta E_k = \int_{poč}^{kon} \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_{kon}^2 - \frac{1}{2} m v_{poč}^2$$

⇒ sagledajmo potencijalnu energiju (opruge):

$$E_p = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} k x\, dx = k \cdot \int_{x_1}^{x_2} x\, dx$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

⇒ ukupna energija:

↳ zbroj kinetičke i potencijalne energije tijela

$$\boxed{E_{uk} = E_k + E_p}$$

↳ za konzervativne sile vrijedi:

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla E_p}$$

↳ u gledanoj jednoj dimenziji pomaka:

$$\nabla E = \hat{\imath} \frac{\partial}{\partial x} E_p$$

↳ znači, ako želimo silu (konzervativnu) iz potencijalne energije, pišemo:

$$\vec{F}(x) = -\hat{\imath}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\vec{F}(x) = -\hat{\imath}\,\frac{1}{2}k\cdot 2x = -\hat{\imath}\,kx$$

⇒ vratimo se na ukupnu energiju primjenjujući sljedeće: $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$E_{uk} = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\left[v(t)\right]^2 + \frac{1}{2}k\left[x(t)\right]^2$$

$$E_{uk} = \frac{1}{2}m\,A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_{uk} = \frac{1}{2}mA^2\frac{k}{m}\sin^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_{uk} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_{uk} = \frac{1}{2}kA^2\cdot\left[\sin^2(\omega t+\varphi) + \cos^2(\omega t+\varphi)\right]$$

$$E_{uk} = \frac{1}{2}kA^2$$

↳ bitan zaključak: ukupnu energiju znamo iz amplitude i konstante opruge:

$$\boxed{E_{uk} = \frac{1}{2}kA^2}$$

⇒ pogledajmo vremensku promjenu energije:

$$\frac{dE_{uk}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(v^2) + \frac{1}{2} k \frac{d}{dt}(x^2) = 0$$

$$\frac{1}{2} m \cdot 2 v \dot{v} + \frac{1}{2} k \cdot 2 x \dot{x} = 0$$

$$m v \ddot{x} + k x v = 0$$

$$v \left(m \ddot{x} + k x \right) = 0$$

$v = 0$

↳ položaj u kojem brzina mijenja smjer ($E_k = 0$)

$m \ddot{x} = -k x \quad / : m$

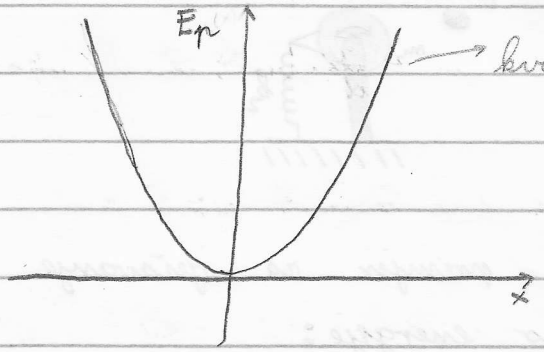
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

rješavamo uz početne uvjete

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2}$$

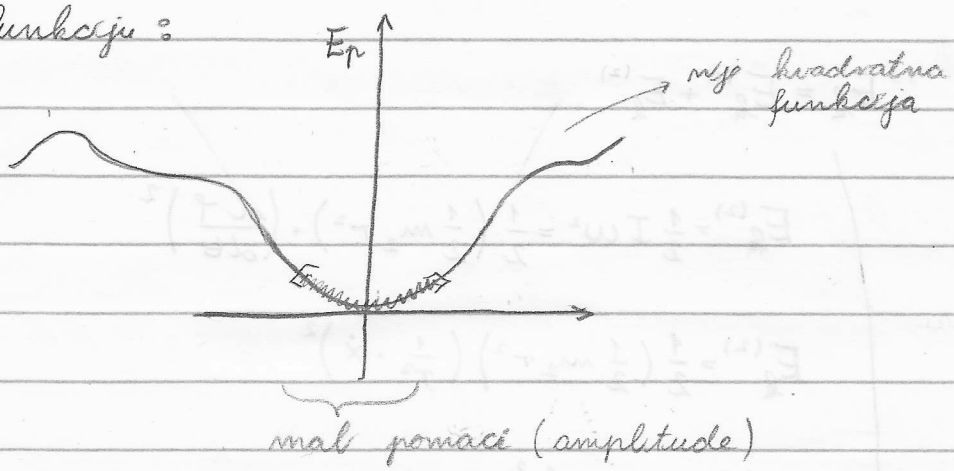
TITRANJE MALIM AMPLITUDAMA

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$$



→ kvadratna funkcija

⇒ ako imamo male amplitude, više nemamo kvadratnu funkciju:



$$E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{1!} E_p'(0)\, x + \frac{1}{2!} E_p''(0)\, x^2 + \dots + \mathcal{O}(x^3)$$

↳ koristimo MacLaurinov razvoj

$$E_p(x) = \frac{1}{2!} \underbrace{E_p''(0)}_{>0} x^2 = \{\text{„neki broj"}\} \cdot x^2$$

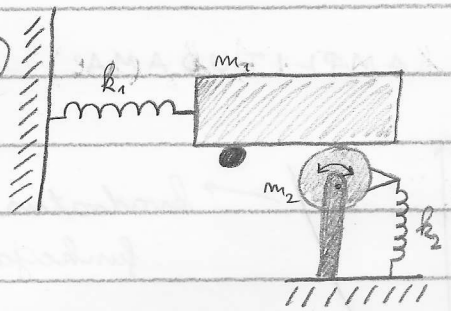
$$\vec{F} = -\nabla E_p = -\hat{\imath} \frac{d}{dx} \left(\{\text{„neki broj"}\} \cdot x^2 \right) = -\hat{\imath} \{\text{„neki broj"}\}\, x$$

$$\vec{F} = -\imath k x$$

↳ vidimo da titranje malim amplitudama možemo poistovjetiti s harmonijskim oscilatorom

PRIMJER: 2.12

BITNO!



↳ kompleksan primjer za rješavanje preko sila, pa rješimo preko energije:

$$E_{uk} = E_k + E_p$$

$$\frac{dE_{uk}}{dt} = 0$$

$T = ?$

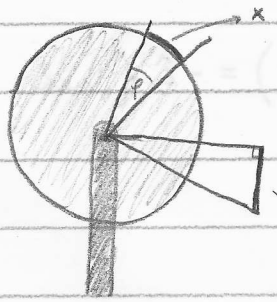
$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)}$$

$$E_k^{(2)} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_2 r^2\right) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$E_k^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_2 r^2\right)\left(\frac{1}{r^2} \cdot \dot{x}\right)^2$$

$$E_k^{(2)} = \frac{1}{4} m_2 \dot{x}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{x}^2$$



$$x = r \cdot \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{1}{r} \cdot x \quad ; \quad \dot{\varphi} = \omega = \frac{1}{r} \dot{x}$$

$$\Delta l = \varphi \cdot d$$

$$\Delta l = \frac{1}{r} x \cdot d$$

$$\Delta l = \frac{d}{r} x$$

⇒ ovo smo koristili kako bi sve izrazili preko puta x (pomak)

$$E_p = E_p^{(1)} + E_p^{(2)} = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (\Delta l)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 \frac{d^2}{r^2} x^2$$

↳ vratimo se do ukupne energije:

$$E_{uk} = \frac{1}{2} \left[m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right] \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(k_1 + k_2 \frac{d^2}{r^2} \right) x^2 \quad / \,'$$

$$\frac{d E_{uk}}{dt} = 0 = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \cdot 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} \left(k_1 + k_2 \frac{d^2}{r^2} \right) 2 x \dot{x}$$

$$\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \ddot{x} + \left(k_1 + k_2 \frac{d^2}{r^2} \right) x = 0 \quad / : \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right)$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k_1 + k_2 \frac{d^2}{r^2}}{m_1 + \frac{1}{2} m_2}}_{\omega^2} x = 0$$

↳ sada znamo period:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + \frac{1}{2} m_2}{k_1 + k_2 \cdot \frac{d^2}{r^2}}}$$

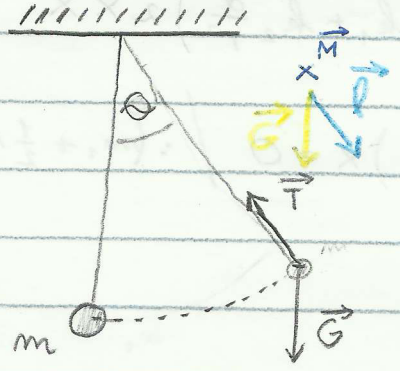
NJIHALA

⇒ najjednostavnije je matematičko njihalo, tijelo čemu se u početku bavit

⇒ kod matematičkog njihala:

a) nit nema masu

b) masa obješenog tijela je točkasta



$\vec{M} = (\text{„krak“}) \times (\text{„sila“})$

$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{G} = \vec{l} \times m\vec{g}$

$M = I \cdot \alpha$

$I = m l^2$; $\alpha = \frac{d}{dt}\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \ddot{\varphi}$

$M = m l^2 \ddot{\varphi}$

$-l m g \sin\varphi = m l^2 \ddot{\varphi}$

moment sile djeluje suprotno od kuta

$-g \sin\varphi = l\ddot{\varphi} \quad / : l$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

↳ sada trebamo riješit ovu diferencijalnu jednadžbu uz početne uvjete

↳ jednadžba: $\boxed{\ddot{\Theta} + \omega_M^2 \sin\Theta = 0}$

↳ početni uvjeti: $\Theta(0) = 0$

$\dot{\Theta}(0) = 0$

↳ pomnožimo jednadžbu s „$\dot{\Theta}$":

$$\dot{\Theta}\ddot{\Theta} + \omega_M^2 \sin\Theta \cdot \dot{\Theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\Theta}\right) + \omega_M^2 \frac{d}{dt}(-\cos\Theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 - \omega_M \cos\Theta\right)}_{\text{const} = C} = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 = C + \omega_M \cos\Theta \quad / \cdot 2$$

$$\dot{\Theta}^2 = D + 2\omega_M \cos\Theta$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \sqrt{D + E\cos\Theta} \quad / \int$$

$$\int \frac{d\Theta}{\sqrt{D + E\cos\Theta}} = \int dt$$

⇒ ovo ne znamo rješiti, pa ćemo se ograničiti na male amplitude (kutove) za koje vrijedi:

$$\sin\Theta \approx \Theta$$

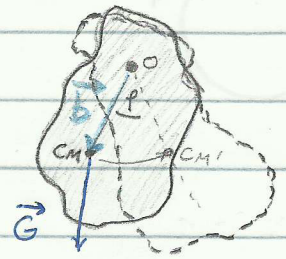
↳ vrijedi za kutove recimo $\leq 8°$

↳ vratimo se na početnu jednadžbu uz pretpostavku $\sin\Theta = \Theta$:

$$\ddot{\Theta} + \omega_M^2 \Theta = 0$$

↳ sada lagano uz početne uvjete možemo rješiti jednadžbu

FIZIČKO NJIHALO



⇒ bilo koje tijelo koje njiše oko neke osi koja ne prolazi kroz centar mase jer tada neće biti njihala

$$\vec{M} = \vec{b} \times \vec{G} \qquad M = I\alpha = I\ddot{\varphi}$$

$$M = mgb\sin\varphi$$

$$I\ddot{\varphi} = -mgb\sin\varphi \;/\; :I$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgb}{I}\sin\varphi = 0$$

$$\frac{mgb}{I} \rightarrow \omega_F^2$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_F^2 \sin\varphi = 0}$$

↳ opet će se javiti problem s „nerješivim" integralom, pa koristimo male kuteve ($\sin\varphi \approx \varphi$):

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_F^2\,\varphi = 0}$$

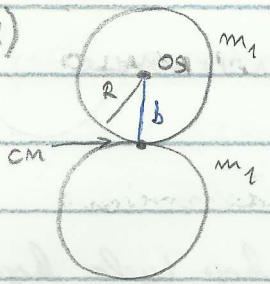
↳ iz toga slijedi:

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$$

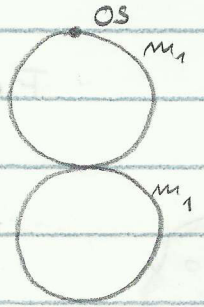
$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_F t)$$

PRIMJER: (2.23)

1)



2)



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}$$

$$I = \frac{2}{5} m_1 R^2 + \left(\frac{2}{5} m_1 R^2 + m_1 (2R)^2 \right)$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m_1 R^2 + \frac{2}{5} m_1 R^2 + m_1 4 R^2}{(m_1 + m_1) g R}}$$

↳ na analogan način računamo za drugi slučaj

REDUCIRANO NJIHALO

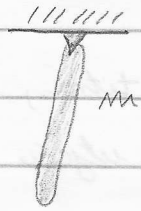
⇒ uvjet koji treba biti zadovoljen:

$$T_F = T_M$$

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

→ duljina reduciranog njihala

↳ za štap:



$$I = I_{CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad \Rightarrow \quad l_r = \frac{2}{3}l$$

↳ ovo je bitno za centar udara - ako tijelo lupimo u centar udara, objesište tijela (os) ne osjeća udar

↳ centar udara nalazi se za „l_r" (reducirana duljina) udaljen od osi

↳ to se primjenjuje u tenisku reketima, baseball-skom palicama kako bi igrači osjećali što manji udarac

PRIGUŠENO TITRANJE

⇒ titrajni sustav postupno gubi energiju

⇒ promatramo harmonički oscilator:

↳ harmonička sila: $F = -kx$

↳ postoji još neka sila otpora koja gasi titranje, a ona je proporcionalna brzini:

$$\boxed{F = -b\dot{x}}$$

„b" → sredstvo u kojem tijelo titra, oblik tijela, ležaja i sve ostale stvari koje utječu na gušenje

⇒ pišemo jednadžbu gibanja:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad ; \quad x(0) = A_0 \,, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad / : m$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\frac{b}{m} \to 2\delta$, $\frac{k}{m} \to \omega_0^2$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

↳ sada opet rješavamo jednadžbu uz probno rješenje:

$$x = x_0 e^{\lambda t}$$

$$X_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\delta\lambda X_0 e^{\lambda t} + \omega_0^2 X_0 e^{\lambda t} = 0 \quad / : (X_0 e^{\lambda t})$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$$

↳ proglasimo: $\lambda = -\delta \pm \omega$

↳ <u>naša rješenja</u>:

$$X_1(t) = X_0 \; e^{(-\delta+\omega)t}$$

$$X_2(t) = X_0 \; e^{(-\delta-\omega)t}$$

↳ konačno rješenje:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

$$\boxed{X(t) = X_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{-\omega t} + X_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{\omega t}}$$

⇒ pogledajmo slučajeve:

a) $\delta < \omega_0$ ⇒ malo prigušenje

b) $\delta > \omega_0$ ⇒ aperiodičko prigušenje

c) $\delta = \omega_0$ ⇒ kritično prigušenje

↳ nadalje, izvrćimo ponašanje pojedinih prigušenja

a) MALO PRIGUŠENJE ($\delta < \omega_0$)

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 + \omega_0} = -\delta \pm \sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \delta^2)}$$

($\omega_0^2 - \delta^2 > 0$)

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \delta^2}$$

↳ vratimo se u ukupno rješenje:

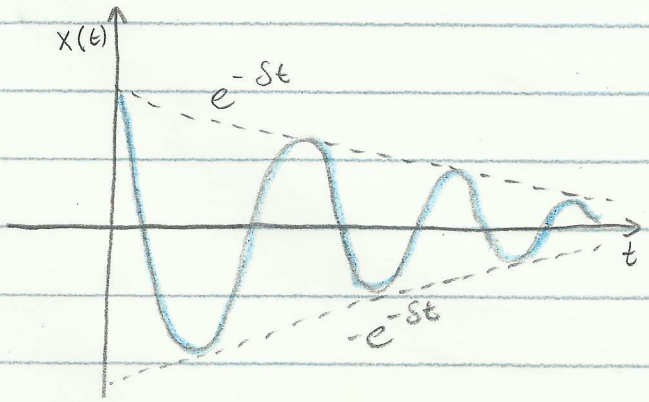
$$X(t) = X_0 e^{(-\delta - i\omega)t} + X_0 e^{(-\delta + i\omega)t}$$

$$X(t) = X_0 e^{-\delta t} \cdot e^{-i\omega t} + X_0 e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t}$$

$$X(t) = X_0 e^{-\delta t} \left(\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2} \right) \cdot 2$$

$$X(t) = 2 X_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t)$$

$$\boxed{X(t) = \underbrace{B e^{-\delta t}}_{A(t)} \cdot \cos(\omega t)}$$



b) APERIODIČKO PRIGUŠENJE ($\delta > \omega_0$)

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$
$$\lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

↳ oznake: $\mu_2 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

$\mu_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ $\qquad \mu_1, \mu_2 \in R$

↳ vrijedi: $\mu_1 > \delta > \mu_2$

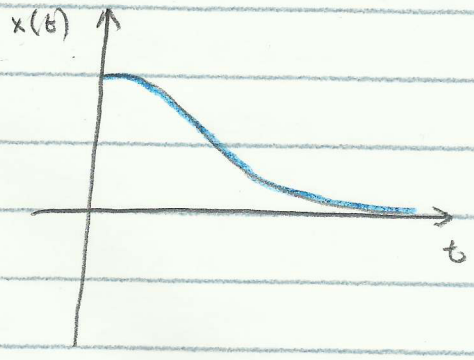
↳ vratimo se na ukupno rješenje:

$$X(t) = X_0 \cdot e^{-\mu_1 t} + X_0 \cdot e^{-\mu_2 t}$$

$$X(t) = X_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + X_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t}$$

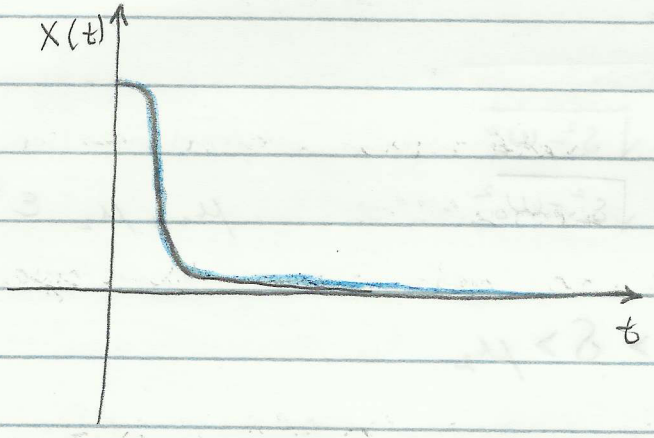
$$X(t) = B e^{-\delta t} \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$$

↳ aperiodičko prigušenje



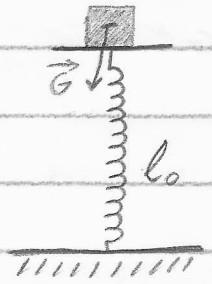
c) KRITIČNO GUŠENJE ($\delta = \omega_0$)

↳ brzo gušenje za automobile i za mjerne uređaje



⇒ NAPOMENA: gušenje koje se najčešće pojavljuje na sustavima je malo prigušenje

ZADAĆA 2.5



$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

nehomogena diferencijalna jednadžba

↳ podsjetimo se rješavati nehomogene diferencijalne jednadžbe:

$$x_{opće} = x_{homogeno} + x_{partikularno\ (nehomogene\ jednadžbe)}$$

↳ odmah znamo rješenje homogene:

$$x_{homogeno} = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

↳ partikularno rješenje biramo ovisno o stupnju polinoma s desne strane: u

↳ u ovom slučaju imamo samo konstantu „g": $\ddot{x} + \omega_0^2 x = g$

$$x_{partikularno} = a$$

$$\dot{x}_{partikularno} = 0 \quad ; \quad \ddot{x}_{partikularno} = 0$$

$$0 + \omega_0^2 a = g \quad \Rightarrow a = \frac{g}{\omega_0^2}$$

↳ opće rješenje:

$$x_{opće} = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{g}{\omega_0^2}$$

ENERGIJA PRIGUŠENOG TITRANJA

⇒ ukupna energija:

$$E = E_k(\dot{x}) + E_p(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\dot{E}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{d}{d\dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x} \cdot \frac{1}{2} m \cdot 2 \cdot \dot{x} + \dot{x} \cdot \frac{1}{2} k \cdot 2 \cdot x$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x} \underbrace{(m\ddot{x} + kx)}$$

sila koja uzrokuje prigušenje → $-b\dot{x}$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2}$$

MJERA PRIGUŠENJA

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \Rightarrow A(t+T) = A_0 e^{-\delta(t+T)} = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{-\delta T}$$

↳ podijelimo ove dvije jednadžbe:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{-\delta T}} = e^{\delta T} \quad / \ln$$

$$\boxed{\delta T = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}}$$

↳ logaritamski ekvivalent prigušenja

ZAD: Amplituda nekog tetranja nakon $t_1 = 7.24\,s$ padne na svoju logaritamsku vrijednost. Kada će amplituda past na tisućiti dio svoje početne vrijednosti?

$t_1 = 7.24$

$A(t_1) = \frac{A_0}{e}$

$A(t_2) = \frac{A_0}{K}$

$K = 1000$

$t_2 = ?$

$A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t}$

$A(0) = A_0$

$$A(t_1) = A_0 e^{-\delta t_1} = \frac{A_0}{e} = A_0 \cdot e^{-1}$$

$$\delta t_1 = 1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{t_1}$$

$$A(t_2) = A_0 e^{-\delta t_2} = \frac{A_0}{K} \Rightarrow e^{-\delta t_2} = K^{-1}$$

$$\delta t_2 = \ln K$$

$$t_2 = \frac{\ln K}{\delta} = t_1 \cdot \ln K$$

PRISILNO TITRANJE

⇒ Želimo da neko prigušeno titranje ostane titrati

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_p(t)$$

$F_p(t)$ → prisilna periodična vanjska sila

$$F_p(t) = F_p \cos(\omega_p t)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_p}{m}\cos(\omega_p t)$$

↳ ovo je nehomogena diferencijalna jednadžba

$$x_{opće}(t) = x_{opće-homogene}(t) + x_{partikularno-nehomogene}(t)$$

⇒ opće rješenje homogene jednadžbe znamo od prije:

$$x_{opće-homogene}(t) = A \cdot e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

⇒ partikularno rješenje nalazimo pomoću probnog rješenja:

$$x_{partikularno-nehomogene}(t) = A(\omega_p)\cos(\omega_p t - \varphi)$$

↑ neporemećaj ↑ neporemećaj

↳ sada nećemo pisati $x_{partikularno-nehomogene}$ dok tražimo neporemećaje - pišemo x_{PN}

OKRENI

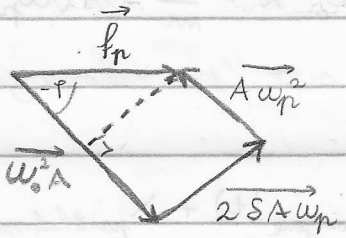
$$\dot{x}_{pN} = -A\omega_p \sin(\omega_p t - \varphi) = A\omega_p \cos(\omega_p t - \varphi + \pi/2)$$

$$\dot{x}_{pN} = -A\omega_p^2 \sin(\omega_p t - \varphi + \pi/2) = A\omega_p^2 \cos(\omega_p t - \varphi + \pi/2 + \pi/2)$$

⇒ znamo da se naša 4 forsa treba zbrojit u nulu:

$$A\omega_p^2 \cos(\omega_p t - \varphi + \pi) + 2\delta A\omega_p \cos(\omega_p t - \varphi + \pi/2) + A\omega_0^2 \cos(\omega_p t - \varphi) - \frac{F_p}{m}\cos(\omega_p t) = 0$$

↳ sada nacrtamo forsre i označimo $\frac{F_p}{m} = f_p$



↳ primjenimo pitagorin poučak nad forsrima:

$$f_p^2 = (2\delta A\omega_p)^2 + (\omega_0^2 A - \omega_p^2 A)^2$$

↳ izrazimo A u ovisnosti o ω_p:

$$A(\omega_p) = \frac{f_p}{\sqrt{4\delta^2\omega_p^2 + (\omega_0^2 - \omega_p^2)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta A\omega_p}{A\omega_0^2 - A\omega_p} = \frac{2\delta\omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2}$$

⇒ sada je naše partikularno rješenje nehomogene:

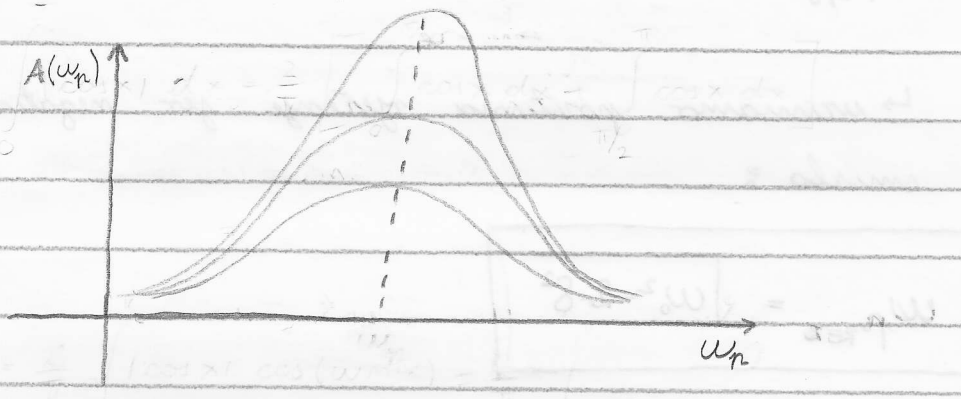
$$X_{PN}(t) = \frac{\frac{F_n}{m}}{\sqrt{4\delta^2\omega_p^2 + (\omega_0^2 - \omega_p^2)^2}} \cdot \cos\left(\omega_p t - \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2}\right)$$

⇒ opće rješenje nehomogene jednadžbe (opće rješenje):

$$X_{ON} = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) + X_{PN}(t)$$

(? ispod A_0 i φ)

⇒ crtamo li krivulju $A(\omega_p)$:



↳ vidimo da naša krivulja ima maksimum (to je rezonantna frekvencija)

⇒ nama je za snagu titranja bitna amplituda, pa promatramo maksimum gornje krivulje:

$$\omega_{p\,REZ} = ?$$

$$\frac{d}{d\omega_p} A(\omega_p) = 0$$

OREGNI

$$\frac{8\delta^2\omega_p + 2(\omega_0^2 - \omega_p^2)(-2\omega_p)}{(\text{„nazivnik“})} = 0 \quad / \cdot (\text{„nazivnik“})$$

$$8\delta^2\omega_p - 4\omega_p(\omega_0^2 - \omega_p^2) = 0$$

↳ jedno rješenje (minimum) : $\omega_{p_1} = 0$

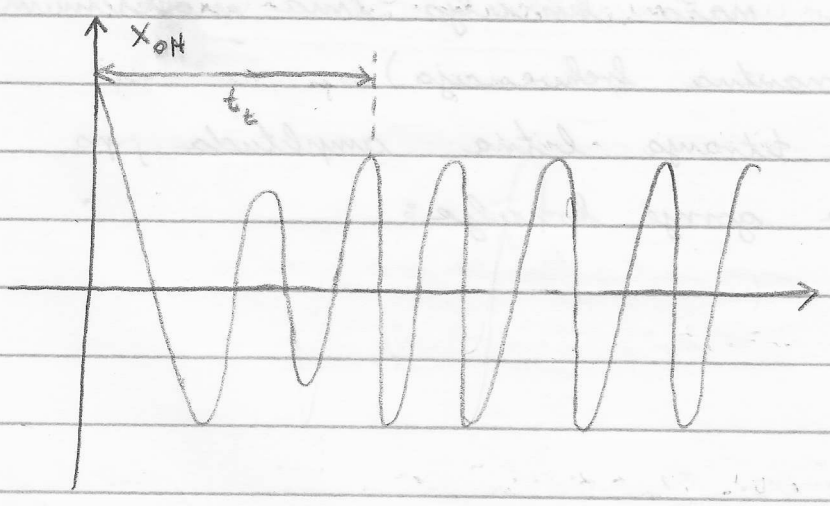
↳ nije nam zanimljivo

$$2\delta^2 - \omega_0^2 + \omega_p^2 = 0$$

$$\omega_{p_{2,3}} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

↳ uzimamo pozitivno rješenje jer negativno nema smisla :

$$\boxed{\omega_{p_{REZ}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$



t_t → tranzijentno vrijeme

↳ vrijeme do „stabilizacije“

PR: 2.36 $m = 10\ kg$

10 titraja za $18.9455\ s \Rightarrow T_0 = 1.8945\ s$

$A_0 \xrightarrow{3.\ titraja} \frac{1}{2} A_0$ ↳ znamo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$F_p = 5N$

$A(\omega_p) = 0.2\,m$ $\qquad A(t) = A_0 e^{-\delta t}$

$\omega_p = ?$

$A(0) = A_0$

$A(3T) = A_0 e^{-\delta \cdot 3T} = \frac{A_0}{2}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$e^{-3\delta T} = \frac{1}{2} \quad / \ln$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ ⟶

$3\delta \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \ln 2$

$36\pi^2\delta^2 = (\ln 2)^2(\omega_0^2 - \delta^2) = \omega_0^2(\ln 2)^2 - \delta^2(\ln 2)^2$

$\delta^2 = \frac{\omega_0^2 (\ln 2)^2}{36\pi^2 + (\ln 2)^2}$

↳ napomena: ako $A(\omega_p)$ nije rezonantna amplituda, očekujemo dvije frekvencije ω_p za koje dobivamo željenu amplitudu

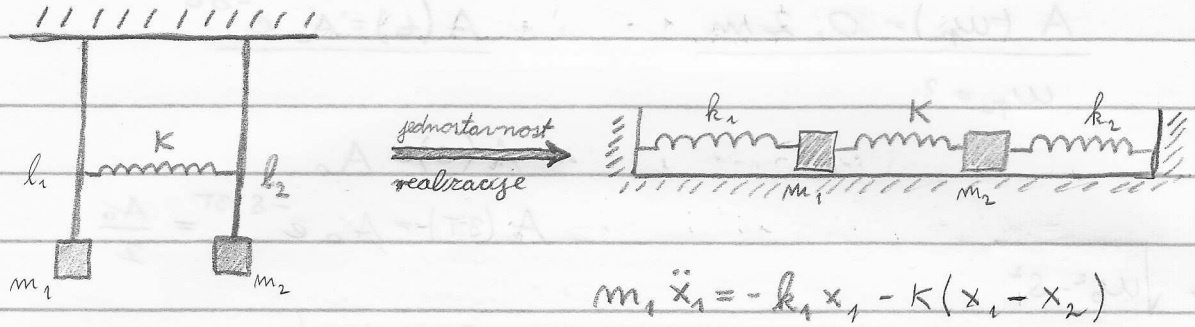
$$A(\omega_p) = \frac{\frac{F_p}{m}}{\sqrt{4\delta^2\omega_p^2 + (\omega_0^2 - \omega_p^2)^2}}$$

$$A^2(4\delta^2\omega_p^2 + \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_p^2 + \omega_p^4) = \left(\frac{F_p}{m}\right)^2$$

↳ imamo bikvadratnu jednadžbu koju znamo rješiti

SLAGANJE TITRANJA

⇒ mi proučavamo slaganje titranja samo na jednom pravcu



$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - K(x_1 - x_2)$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - K(x_2 - x_1)$$

↳ sustav diferencijalnih jednadžbi koj je teško riješit, ali mi ćemo dat sljedeće uvjete:

$$m_1 = m_2 = m$$
$$k_1 = k_2 = k$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m} x_1 + \frac{K}{m}(x_1 - x_2) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m} x_2 + \frac{K}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{K}{m} = \Omega^2$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \Omega^2(x_1 - x_2) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \Omega^2(x_2 - x_1) = 0$$

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$$

↳ kutovi su jednaki jer je razlika faza nula

⇒ faze su nula jer je oni titranje na jednom pravcu (Oberbeckova njihala)

↳ rješavamo dakle sustav:

$$-\omega^2 A + (\omega_0^2 + \Omega^2) A - \Omega^2 B = 0 \quad / : A$$

$$-\omega^2 B + (\omega_0^2 + \Omega^2) B - \Omega^2 A = 0 \quad / : B$$

$$-\omega^2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) - \Omega^2 \cdot \frac{B}{A} = 0$$

$$-\omega^2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) - \Omega^2 \cdot \frac{A}{B} = 0$$

↳ oduzmemo ove dvije jednadžbe i dobivamo:

$$\frac{B}{A} = \frac{A}{B} \qquad A_{1,2} = \pm B$$

↳ dva slučaja: a) u fazi: $A = B$ (uf)

b) u protufazi: $A = -B$ (pf)

a) $\boxed{A = B}$

$$-\omega^2 A + (\omega_0 + \Omega^2) A - \Omega^2 A = 0$$

$$-\omega^2 + \Omega_0^2 = 0$$

$$\boxed{\omega_{uf} = \omega_0}$$

b) $\boxed{A = -B}$

$$-\omega^2 A + (\omega_0^2 + \Omega^2) A - \Omega^2 A = 0$$

$$\boxed{\omega_{pf} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}}$$

⇒ još jedan slučaj slaganja titranja je najmjenično titranje:

↳ kako bi riješili ovaj problem, trebamo uvesti sljedeće ramjene varijable:

$$q_1(t) = (x_2 + x_1)\sqrt{\frac{m}{2}}$$

$$q_2(t) = (x_2 - x_1)\sqrt{\frac{m}{2}}$$

↳ sa ovom ramjenom se vraćamo u sustav:

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - \Omega^2(x_1 - x_2)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 - \Omega^2(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{q}_1 + \omega_{uf}^2 q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_{pf}^2 q_2 = 0$$

↳ ovo su standardni oblici harmoničkih oscilatora:

$$q_1(t) = Q_1 \cos(\omega_{uf} t + \varphi_1)$$

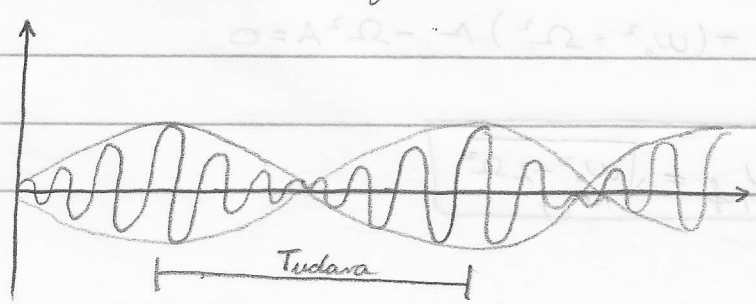
$$q_2(t) = Q_2 \cos(\omega_{pf} t + \varphi_2)$$

↳ vratimo se u ramjene varijable i dobivamo:

$$X_1(t) = \sqrt{\frac{1}{2m}}\left[Q_1 \cos(\omega_{uf} t + \varphi_1) - Q_2 \cos(\omega_{pf} t + \varphi_2)\right]$$

$$X_2(t) = \sqrt{\frac{1}{2m}}\left[Q_1 \cos(\omega_{uf} t + \varphi_1) + Q_2 \cos(\omega_{pf} t + \varphi_2)\right]$$

↳ ovo izgleda ovako:



→ ovo se koristi kod „štimanja" instrumenata

ZAD: Na tijelo mase 0.5 kg koje titra na oprugi konstante $k = 10 \frac{N}{m}$ djeluje periodična sila od 2 N. Ako je rezonantna amplituda 0.4 m, kolik je faktor prigušenja b?

$m = 0.5\ kg$

$k = 10\ N/m$

$F_p = 2N$

$A(\omega_{p_{rez}}) = 0.4\ m$

$b = ?$

↳ jednadžba gibanja:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_p \cos(\omega_p t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad 2\delta = \frac{b}{m}$$

$$x(t)_{opće} = A e^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi) + \underbrace{\frac{F_p/m}{\sqrt{4\delta^2\omega_p^2 + (\omega_0^2 - \omega_p^2)^2}}}_{A(\omega_p)} \cdot \cos(\omega_p t - \varphi)$$

↳ za rezonanciju: $\frac{d}{d\omega_p} A(\omega_p) = 0 \Rightarrow \omega_{p_{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

$$A(\omega_{p_{rez}}) = \frac{F_p/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \Leftarrow A(\omega_{p_{rez}}) = \frac{F_p/m}{\sqrt{4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2) + (\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2)^2}}$$

↓

A =

odavde izrazimo δ i imamo kvadratnu jednadžbu za „b"

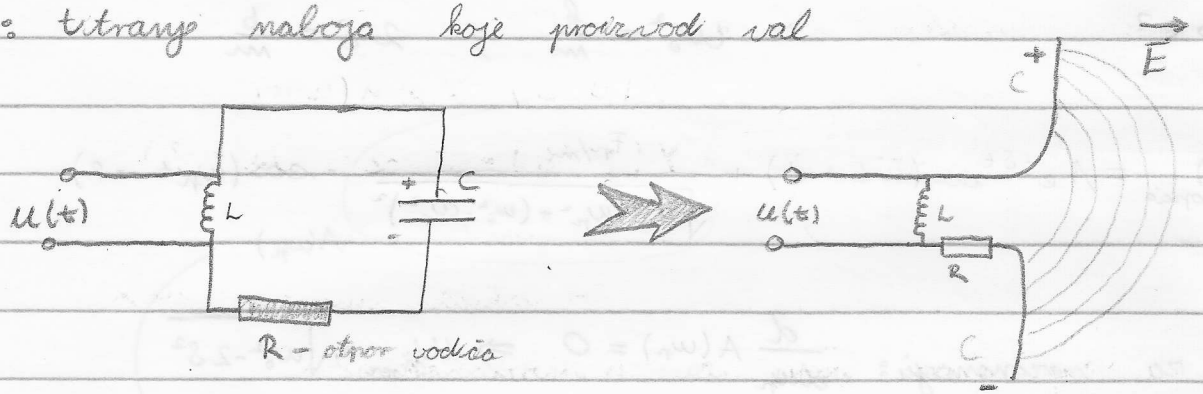
VALOVI

„TITRANJE" + „ELASTIČNO SREDSTVO" = VAL

⇒ NAPOMENA: za elektromagnetske valove ne trebamo sredstvo

↳ neki fizičari pokušali su pronaći ETER, no pokazalo se da toga nema

PR: titranje naboja koje proizvodi val



⇒ PODJELE:

1) mehanički i elektromagnetski valovi
2) transferzalni i longitudinalni valovi
3) prema obliku valne fronte (ravni, sferni)
4) progresivni i stojni valovi

⇒ VALNA FRONTA: sve točke koje titraju na isti način

JEDNADŽBA PROGRESIVNOG VALA

⇒ moramo uvesti još jednu koordinatu:

$$\boxed{y = f(x, t)}$$

y – to nam je ustvari sam val ovisa o udaljenost od izvora (x) i vremenu (t)

⇒ za izvor vrijedi $x = 0$:

$$y(0, t) = A\cos(\omega t)$$

$$y(x, t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

↳ ovo titranje kasni za izvorom

↳ zaključujemo: $\varphi \sim x$

↳ uvedimo konstantu proporcionalnosti:

$$\varphi = \xi \cdot x$$

$$y(x, t) = A\cos(\omega t - \xi x)$$

⇒ VALNA DULJINA: udaljenost između dvije valne fronte

↳ oznaka: λ

⇒ zbog svojstva valne duljine vrijedi: $y(0, t) = y(\lambda, t)$

$$A\cos(\omega t) = A\cos(\omega t - \xi\lambda)$$

$$\xi\lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y(t,x) = A\cos(\omega t - \zeta x)$$

↳ jednadžba progresivnog vala u jednoj dimenziji

$$\zeta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \text{iznos valnog vektora (valni broj)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

⇒ jednadžba progresivnog vala:

$$\boxed{y(t,x) = A\cos(\omega t - kx)} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad v = \lambda\cdot\nu = \frac{\lambda}{T}$$

↳ pogledajmo da nam ovaj minus u jednadžbi stvarno pomiče val udesno:

$$y(t_0, x_m) = A_0\cos(\underbrace{\omega t_0 - k x_m}_{2\pi}) = A_0$$

$$\omega_0 t_0 - k x_m = 2\pi$$

$$x_m = \frac{1}{k}(\omega t_0 - 2\pi)$$

↳ sada vidimo za trenutak $t_0 + \Delta t$:

$$y(t_0+\Delta t,\ x_{m'}) = A_0\cos[\underbrace{\omega(t_0+\Delta t) - k x_{m'}}_{2\pi}] = A_0$$

$$\omega(t_0+\Delta t) - k\, x'_m = 2\pi$$

$$x'_m = \frac{1}{k}\left[\omega(t_0+\Delta t) - 2\pi\right] = \frac{1}{k}(\omega t_0 - 2\pi) + \frac{\omega \Delta t}{k}$$

$$x'_m = x_m + \frac{\omega \Delta t}{k}$$

↳ ovako smo dokazali da je $x'_m > x_m$ jer znamo da je $\omega > 0$, $\Delta t > 0$ i $k > 0$

⇒ NAPOMENA: često se u zadacima traži da se prepoznaju veličine po pozicijama u zapisu (vidi PRIMJER 3.1 ⇒ Horvat - Fizika II)

VALNA JEDNADŽBA

⇒ već smo dobili jednadžbu progresivnog vala:

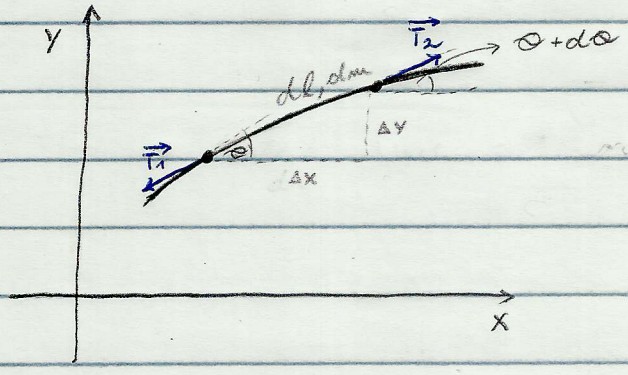
$$Y(t, x) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

↳ možda smo nelogično izvodili ovu jednadžbu

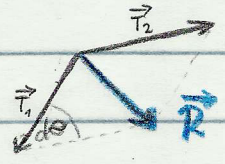
↳ mi smo ovo izveli jer smo znali da je val posljedica nekog titranja

↳ pravi „Newtonijanski" pristup bi lako izvesti ovo iz mehaničke jednadžbe - naša jednadžba vala je rješenje te jednadžbe gibanja

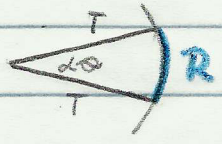
⇒ pokušajmo izvesti jednadžbu vala iz jednadžbe gibanja djelića žice na kojoj smo uzrokovali val:



$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$$



$$R = T \cdot d\Theta$$



↳ koristimo se geometrijom:

$$\frac{m}{l} \sim \frac{dm}{dl} = \mu$$

$$dl \sim dx$$

↳ zapis akceleracije: $a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

↳ iz geometrije znamo: $\operatorname{tg}\Theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\text{infinitezimal}} \frac{\partial y}{\partial x}$

$$\operatorname{tg}\Theta \sim \Theta \quad \Rightarrow \quad \Theta \sim \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$d\Theta \sim d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx$$

↳ također, iz duljine kružnog luka vidimo

$$R = T\, d\Theta = dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu\, dl \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\, d\Theta$$

$$\mu\, dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx \quad / : T$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

$$v^2 = \frac{T}{\mu} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

↳ jednadžba gibanja progresivnog vala koja ima rješenje:

$$y(t, x) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

ZAD: Transverzalni valni impuls na užetu u $t = 0$ izgleda ovako: $y(x, 0) = \frac{3a^3}{2x^2 + a^2}$, $a = 1\,m$. Napiši izraz za odgovarajući putujući val koji se kreće od 2 m/s gore u negativnom smjeru osi „x".

↳ član u zagradi: $(x - vt)$

$\xrightarrow{x}$

$\Downarrow$

$(x + vt)$

$\xleftarrow[-x]{\qquad x}$

$$y(x, t) = \frac{3a^2}{2(x+vt)^2 + a^2} = \frac{3a^2}{2\left(x + 2\frac{m}{s} \cdot t\right)^2 + a^2}$$

$$y(x, t) = \frac{3a^2}{2\left(x + 2\,m/s \cdot t\right)^2 + a^2}$$

↳ ovaj val se giba u negativnom smjeru osi apscisa brzinom 2 m/s

SUPERPOZICIJA

VALOVA

⇒ imamo dva vala:

$$y_1(t,x) = A\,\sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2(t,x) = A\,\sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)$$

↳ radimo zbrajanje valova: $y = y_1 + y_2$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$y = 2A\,\sin\left[\frac{(k_1+k_2)x - (\omega_1+\omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1-k_2)x - (\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)}{2}\right]$$

↳ ovo je zamišljeno, pa pogledajmo slučajeve:

a) $k_1 = k_2 = k$; $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $\underbrace{\varphi_1 = \varphi_2 = 0}_{\text{u fazi}}$

$$y = 2A\,\sin[kx - \omega t]\cos 0$$

$$y = 2A\,\sin(kx - \omega t)$$

b) $\omega_1 = \omega_2 + \delta\omega$; $k_1 = k_2 + \delta\omega$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$y = 2A\,\sin\left[\frac{(k_1+k_2)x}{2} - \frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right]\cos\left[\frac{\delta k}{2} - \frac{\delta\omega}{2}t\right]$$

↳ nama će biti zanimljiv mali pomak, pa je „δ" vrlo mal

OKRENI

↳ ako je „δ" mal, ovo možemo aproksimirati izrazom:

$$y = 2A \sin(kx - \omega t) \cos\left[\frac{\delta k}{2}\left(x - \frac{\frac{\delta\omega}{2}}{\frac{\delta k}{2}} \cdot t\right)\right]$$

$$y = 2A \sin(kx - \omega t) \cos\left[\frac{\delta k}{2}\left(x - \frac{\delta\omega}{\delta k} t\right)\right]$$

↳ pustimo na infinitezimale: $\delta\omega \to d\omega$; $\delta k \to dk$

↳ zaključujemo da član uz „t" u kosinusu mora biti brzina:

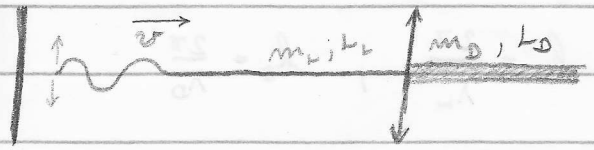
$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

↳ grupna brzina - „kompletna" brzina cijelog signala

↳ od prije znamo:

$$v_f = \lambda \cdot \nu$$

REFLEKSIJA VALOVA



↳ indeks: L → lijevo
D → desno

$$Y_U(t,x) = Y_U^{(0)} \cos(\omega t - k_L x)$$
$$Y_T(t,x) = Y_T^{(0)} \cos(\omega t - k_D x)$$
$$Y_R(t,x) = Y_R^{(0)} \cos(\omega t + k_L x)$$

jednadžbe:
U → ulazni val
T → transmitirani val
R → reflektirani val

→ pretpostavili smjer gibanja!

⇒ vrijedi jednadžba: $Y_U + Y_R = Y_T$

↳ uvrstimo $x=0$, $t=t$:

$$Y_U^{(0)} \cos(\omega t) + Y_R^{(0)} \cdot \cos(\omega t) = Y_T^{(0)} \cos(\omega t)$$

$$\boxed{Y_U^{(0)} + Y_R^{(0)} = Y_T^{(0)}}$$ → ovo nam je jedna jednadžba

↳ drugu jednadžbu dobijemo deriviranjem za $x=0$, $t=t$:

$$\boxed{k_L Y_U^{(0)} - k_L Y_R^{(0)} = Y_T^{(0)} k_D}$$ → ovo je druga jednadžba

↳ rada pomoću ove dvije jednadžbe izrazimo amplitudu reflektiranog vala

OKRENI

$$y_R^{(0)} = y_U^{(0)} \cdot \frac{k_L - k_D}{k_L + k_D}$$

↳ koristimo relacije: $k_L = \frac{2\pi}{\lambda_L}$, $k_D = \frac{2\pi}{\lambda_D}$

$$v = \lambda \cdot \nu = \frac{2\pi}{k} \cdot \nu = \frac{2\pi\nu}{k} = \frac{\omega}{k}$$

$$y_R^{(0)} = y_U^{(0)} \cdot \frac{\frac{k_L}{\omega} - \frac{k_D}{\omega}}{\frac{k_L}{\omega} + \frac{k_D}{\omega}}$$

$$y_R^{(0)} = y_U^{(0)} \cdot \frac{\frac{1}{v_L} - \frac{1}{v_D}}{\frac{1}{v_L} - \frac{1}{v_D}}$$

$$\boxed{y_R^{(0)} = y_U^{(0)} \cdot \frac{v_D - v_L}{v_D + v_L}} \qquad v = \lambda\nu = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow v_{L,D} = \sqrt{\frac{T}{\mu_{L,D}}}$$

↳ iz ove jednakosti možemo vidjeti što se događa u graničnim slučajevima:

↳ npr. masa desno $\longrightarrow \infty$

↳ slijedi da je $v_D = 0$:

$$y_R^{(0)} = y_U^{(0)} \cdot \frac{-v_L}{v_L}$$

$$\boxed{y_R^{(0)} = -\, y_U^{(0)}}$$ → vidimo da je reflektirani val pomaknut u fazi za pola valne duljine

⇒ analogno izvodimo formulu za transmitiran val:

$$\boxed{Y_T^{(0)} = Y_U^{(0)} \frac{2v_D}{v_D + v_L}}$$

⇒ za reflektiran val dobijemo:

$$Y_R(t, x) = -Y_U^{(0)} \cos(\omega t + k_2 x)$$

↳ uvučemo minus pod kosinus i dobijemo očit pomak u fazi:

$$Y_R^{(0)} = Y_U^{(0)} \cos(\omega t + k_2 x + \pi)$$

⇒ ove formule gore vrijede za refleksiju na beskonačno teškom kraju, a za refleksiju na slobodnom kraju vrijedi:

$$m_D = 0 \Rightarrow v_D = \infty$$

$$Y_R^{(0)} = Y_U^{(0)} \cdot \frac{\infty - v_L}{\infty - v_D} = \lim_{x \to \infty} Y_U^{(0)} \frac{1 - \frac{v_L}{x}}{1 + \frac{v_D}{x}} = Y_U^{(0)} \cdot 1$$

$$\boxed{Y_R^{(0)} = Y_U^{(0)}}$$ → vidimo da sada reflektiran val sada nema pomak u fazi već je jednak kao i ulazni val

ENERGIJA I SNAGA KOD VALOVA

⇒ ukupna energija kod vala:

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta U$$

↳ gledamo komadić žice:

Δx → duljina komadića žice

Δm → masa komadića žice

$$Y(t, x) = A_0 \cos(\omega t - kx)$$

↳ naše oznake:

$\underrightarrow{v}$ → brzina širenja vala $\left(\underrightarrow{v} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \right)$; $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta l}$

$v\updownarrow$ → brzina čestice koja titra $\left(v\updownarrow = \frac{dY}{dt} \right)$

↳ sada napišemo kinetičku energiju:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m \, v\updownarrow^2 = \frac{1}{2} \Delta m \left(\frac{dY}{dt} \right)^2$$

↳ deriviramo našu početnu jednadžbu vala:

$$\frac{dY}{dt} = -A_0 \omega \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{dY}{dx} = -A_0 k \sin(\omega t - kx)$$

↳ vratimo se na formulu kinetičke energije i umstimo što znamo:

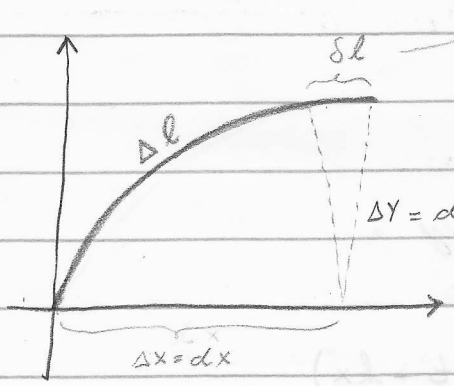
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\mu \Delta l \cdot A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

↳ nama je promjena duljine raspora Δx, pa vrijedi $\Delta l = \Delta x$:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\mu \Delta x \cdot A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

↳ nama je korisno govoriti o gustoći energije, pa gornju jednadžbu podijelimo sa Δx:

$$e_k = \frac{\Delta E_k}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$



→ infinitezimal

⇒ pri nam treba za unutarnju energiju

⇒ žica se produlji za δl te joj poraste napetost pa imamo energiju:

$$\Delta U = T \cdot \delta l$$

↳ vidimo da vrijedi:

$$\delta l = \Delta l - dx$$

OKRENI

↳ iz geometrije vidimo:

$$(\Delta l)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

↳ vratimo se u jednadžbu za δl:

$$\delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx$$

$$\delta l = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - dx$$

$$\delta l = dx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] - dx$$

$$\delta l = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

↳ uvrstimo u ΔU:

$$\Delta U = T \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

↳ opet, gledamo gustoću energije:

$$\frac{\Delta U}{dx} = e_p = \frac{1}{2} \cdot T \cdot A_0^2 k^2 sin^2(\omega t - kx)$$

$$e_p = \frac{1}{2} \mu \underrightarrow{v}^2 A_0^2 k^2 sin^2(\omega t - kx)$$

⇒ ukupna gustoća energije:

$$e = e_k + e_p = \frac{1}{2}\mu A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2}\mu A_0^2 \underrightarrow{v}^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

↳ primjenimo sljedeće:

$$\underrightarrow{v} = \lambda \cdot \nu \cdot \frac{2\pi}{2\pi}$$

$$\underrightarrow{v} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \underrightarrow{v}^2 k^2 = \omega^2$$

$$\boxed{e = \mu A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kt)}$$

⇒ nama je bitna srednja energija:

$$\bar{e} = \mu A_0^2 \omega^2 \langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle$$

funkcija „medijan" - ima izvod preko integrala

⋮

$$\boxed{\bar{e} = \frac{1}{2}\mu A_0^2 \omega^2}$$

⇒ srednja snaga:

$$\bar{P} = \bar{e} \cdot \underrightarrow{v} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}\mu A_0^2 \omega^2 \underrightarrow{v}}$$

STOJNI VAL

⇒ nastaje kao posljedica superpozicije ulaznog i reflektiranog vala:



$$y_1(t,x) = A\cos(\omega t - kx)$$



$$y_2(t,x) = -A\cos(\omega t + kx)$$

$$y_2(t,x) = A\cos(\omega t + kx + \pi)$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \pi)\right]$$

↳ primjenimo trigonometrijski identitet za zbroj kosinusa:

$$y = 2A\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx + \pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx - \pi}{2}\right)$$

$$y = 2A\cos(at + \pi/2)\sin(kx)$$

↳ promatramo rubne uvjete:

a) $y(t,0) = 0 \quad \Rightarrow \sin(0) = 0$

b) $y(t,l) = 0 \quad \Rightarrow \sin(kl) = 0$

↳ iz uvjeta pod „b":

$$kl = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4\ldots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_n} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot l = n\pi$$

$$2l = n\lambda_n$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2l}{n}} \rightarrow \text{valne dolžine harmonika}$$

↳ poglejmo primjere:

a) $\lambda_1 = 2l$

↳ osnovni harmonik

$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1}$

b) $\lambda_2 = l$

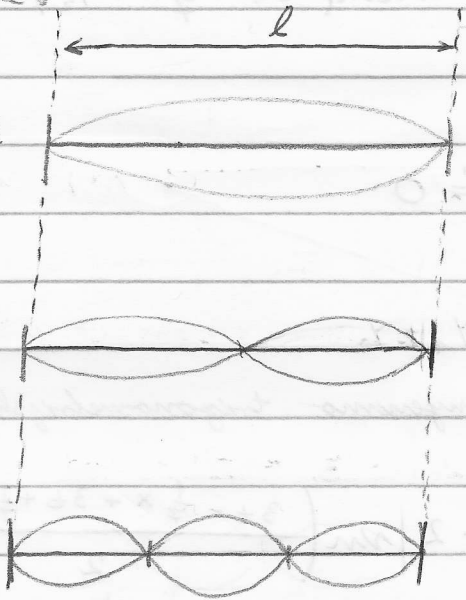
↳ prvi višji harmonik

$\nu_2 = \frac{v}{\lambda_2}$

c) $\lambda_3 = \frac{2}{3}l$

↳ drugi višji harmonik

$\nu_3 = \frac{v}{\lambda_3}$



ZADO: Val se širi zakonom $Y_1(t,x) = 4\sin\left(3t - \frac{1}{7}x\right)$. Njemu se superponira val $Y_2(t,x)$ i nastaje stojni val. Nađi $Y_2(t,x)$ ako se čvor javlja na mjestu $x_0 = 5m$?

$\underrightarrow{Y_1(t,x) = 4\sin\left(3t - \frac{1}{7}x\right)}$ $\qquad x_0 = 5m$

$\underleftarrow{Y_2(t,x) = 4\sin\left(3t + \frac{1}{7}x + \varphi_2\right)}$

$Y(t, x_0) = 0$

$Y(t,x) = Y_1 + Y_2$

↳ primjenimo trigonometrijski identitet za zbroj

$$Y(t,x) = 4 \cdot 2 \sin\left(\frac{3t - \frac{1}{7}x + 3t + \frac{1}{7}x + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3t - \frac{1}{7}x - 3t - \frac{1}{7}x - \varphi_2}{2}\right)$$

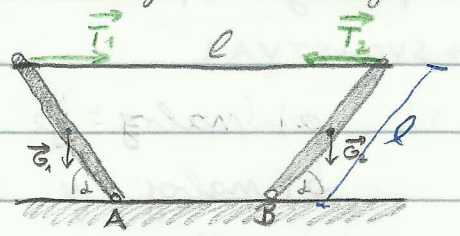
$$Y(t,x) = 8\sin\left(3t + \frac{\varphi_2}{2}\right)\cos\left(-\frac{1}{7}x - \frac{\varphi_2}{2}\right)$$

↳ uvrstimo x_0 i izjednačimo s nulom:

$$\cos\left(-\frac{1}{7}x_0 - \frac{\varphi_2}{2}\right) = 0$$

$$\varphi_2 = 1.71$$

ZAD: Žica duljine 5 m i mase m = 0.732 kg je razapeta između štapova težina $G_1 = G_2 = 235\,N$. Štapovi su nagnuti pod kutom $\alpha = 57°$. Kolika je frekvencija šestog harmonika? Štapovi su jednake duljine kao i žica

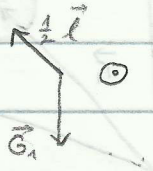


$$\sum_i \vec{M}_A^{(i)} = 0 = \vec{M}_{G_1} + \vec{M}_{T_1}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$$

$\vec{M}_{G_1}$ = „krak" × „sila" → gleda iz papira:



$\vec{M}_{T_1}$ = „krak" × „sila" → gleda u papir: $\vec{l}$ × $\vec{T}_1$

$$M_{G1} = G_1 \cdot \frac{1}{2} l \sin(\alpha + \pi/2)$$

$$M_{T_1} = T_1 \cdot l \sin(\pi - \alpha)$$

$$G_1 \cdot \frac{1}{2} l \sin(\alpha + \pi/2) = T_1 \sin(\pi - \alpha) \cdot l$$

$$\frac{1}{2} G_1 \cos\alpha = T_1 \sin\alpha$$

$$T_1 = T = \frac{G_1}{2\tan\alpha}$$

$$v = \lambda_n \cdot \nu_n \; ; \; \lambda_n = \frac{2l}{n}$$

$$v = \frac{2l}{n} \nu_n$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

↳ uvrstimo i vraćamo

$$v = \frac{2l}{6} \nu_6 \Rightarrow \nu_6 = \frac{6v}{2l}$$

ELEKTRIČNE POJAVE

⇒ električni naboj:

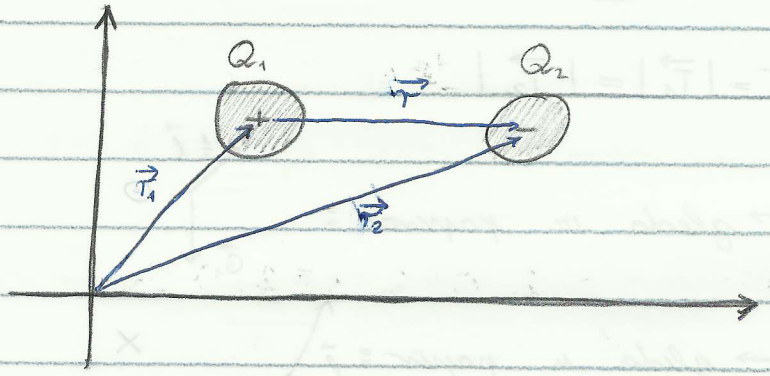
↳ postoj „pozitivni" i „negativni"

↳ SVOJSTVA:

a) naboj je očuvan

b) naboj je kvantiziran ($Q(e^-) = 1.6 \cdot 10^{-19} C$)

c) naboj se može slobodno gibati u vodiču



$$\vec{r}_1 + \vec{r} = \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

⇒ eksperimentalno je pokazano:

$$|\vec{F}| \sim \frac{1}{r^2} \quad ; \quad |\vec{F}| \sim Q_1$$
$$|\vec{F}| \sim Q_2$$

$$\vec{F} = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}(-\hat{r}) = k \cdot (-\hat{r}) \cdot \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}$$

$$\boxed{\vec{F} = -k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

→ odmah uvrstamo složenost ove formule i formule za gravitacijsku silu

⇒ pogledajmo iznos „električne" sile na primjeru:

↳ imamo 2 komada od 1 kg bakra

$M(Cu) = 65.5\ g/mol$

$Z(Cu) = 29$

$r = 100\ km$



$$F = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{(100\,km)^2} = \ldots\ldots = 2\,072\,172.7\ N$$

$$1\,g = \frac{1}{65.5}\ mol$$

↳ broj atoma u jednom molu: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$

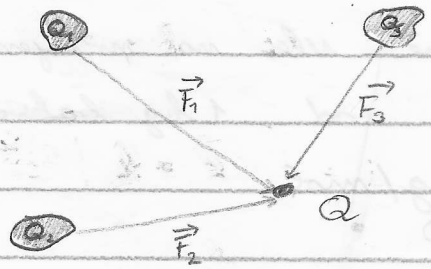
$$1\,g = \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{65.5}\ atoma$$

↳ stoga, naboj u jednom gramu bakra je:

$$Q(1\,g) = \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{65.5} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$$

↳ uvrstimo gore i dobijemo rezultat od dva milijuna newtona

Princip superpozicije naboja



$$\vec{F}_Q = \sum_i \vec{F}_i$$

⇒ ELEKTRIČNO POLJE:

$$\vec{F}_Q = k \cdot \frac{Q \cdot Q_1}{r^2} \hat{r} = \left(k \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot \hat{r} \right) \cdot Q$$

$\vec{E}_1$

↳ vidimo da kad stavimo neki naboj Q u prostor oko Q_1, na Q djeluje neka sila

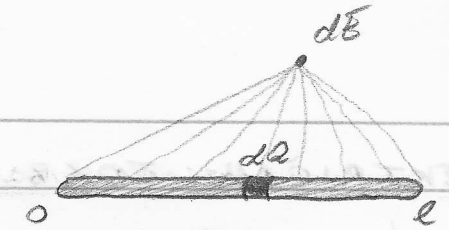
↳ to je posljedica električnog polja koje stvara naboj Q_1:

$$\vec{F}_Q = \vec{E}_1 \cdot Q$$

↳ općenito, s više naboja: $\vec{F}_Q = \left(\sum_i \vec{E}_i \right) Q$

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r^2} \hat{r}$$

⇒ <u>linijski naboj:</u>



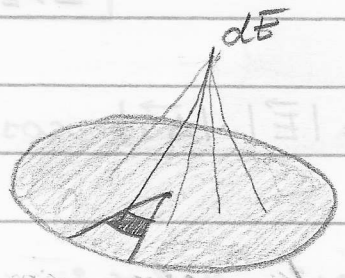
$$\mu = \frac{Q}{l} = \frac{dQ}{dl}$$

$$d\vec{E} = k \cdot \frac{dQ}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E} = \int_0^l d\vec{E} = k \int_0^l \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = k\mu \int_0^l \frac{dl}{r^2} \hat{r} \;//$$

⇒ <u>površinski naboj:</u>



$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{dQ}{dS}$$

$$\vec{E} = k \int_0^S \frac{\sigma \, dS}{r^2} \hat{r}$$

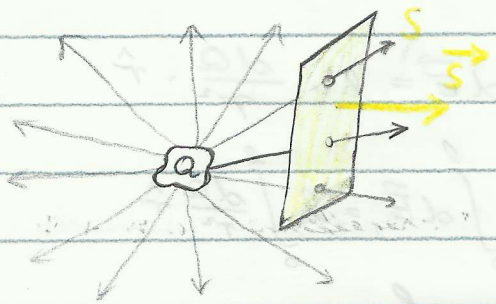
- ↳ dS treba izraziti na prikladniji način (npr. možda nam odgovaraju sferne, a možda kartezijeve koordinate)

⇒ <u>volumni naboj:</u>

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{dQ}{dV} \quad ; \quad E = k \cdot \int_0^V \rho \cdot \frac{dV}{r^2} \hat{r}$$

⇒ ELEKTRIČNI TOK:

↳ pogledajmo cilindrično polje:



$$\vec{S} = \hat{S}\, S$$

↳ vektorizirano površinu

↳ treba nam veličina koja nam opisuje koliko silnica „probada" (prolazi kroz) neku danu površinu:

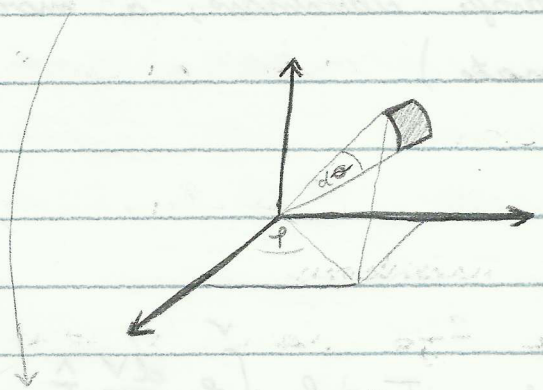
$$\boxed{\Delta\phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}}$$

$$\Delta\phi = |\vec{E}| \cdot |\Delta\vec{S}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{E}, \hat{S})$$

↳ za točkast naboj:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\Delta\phi_E = \int_0^S E\, dS = k \int_0^S \frac{Q}{r^2}\, dS$$



$$\int dS = r^2\, d\Omega = r^2 4\pi$$

$$\Delta\phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{Q}{r^2}\, r^2\, d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega$$

↳ ako primjenimo : $r^2 d\Omega = r^2 4\pi$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q_{unutor}}{\varepsilon_0}}$$

↳ iz ovoga slijedi prva Maxwellova jednadžba u integralnom obliku:

$$\boxed{\int_0^s \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{unutor\,s}}{\varepsilon_0}}$$

⇒ u općenitosti, slikovito električni tok definiramo na način:

$\Delta\Phi_E$ = „broj izlaznih rupa" − „broj ulaznih rupa"

⇒ nama tok služi kako bi pametnim odabirom površine mogli električno polje izvući izvan integrala (jer je ono konstantno po površini)

↳ to radimo s integralnom prvom Maxwellovom jednadžbom

↳ takva površina koja nam to omogućava naziva se GAUSSOVA POVRŠINA

INTEGRALNI TEOREMI

① Gaussov teorem o divergenciji vektorskog polja

$$\vec{A}(x, y, z)$$

↳ karterzjev koordinatni sustav

$$\oint_S \vec{A}\, d\vec{S} = \int_V (\nabla \vec{A})\, dV$$

S ← gaussova površina

↳ za karterzjev koordinatni sustav vrijedi:

$$\nabla = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

② Stokesov teorem o rotaciji vektorskog polja

$$\oint_C \vec{A}\, d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{A})\, d\vec{S}$$

③ Greenov teorem o gradijentu skalarnog polja

$$\vec{A} = \nabla \phi \quad \Rightarrow \quad \int_r^k \vec{A}\, d\vec{\ell} = \int_r^k d\phi = \phi(k) - \phi(r)$$

PR: (4.3) Izračunaj električno polje volumno nabijene kugle radijusa R. Naboj kugle je +Q!

↳ konstrukcija Gaussove površine (uvjeti):

a) mora biti zatvorena - u potpunosti obuhvaća naboj

b) električno polje je ili okomito na površinu ili paralelno s površinom

c) električno polje je konstantno na površini

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{unutar\ S}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho\, dV$$

$$Q_{unutar\ površine\ S\ koja\ omeđuje\ volumen\ V} = \int_V \rho\, dV$$

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho\, dV = \int_V (\nabla E)\, dV$$

$$\int \left(\nabla E - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \right) dV = 0$$

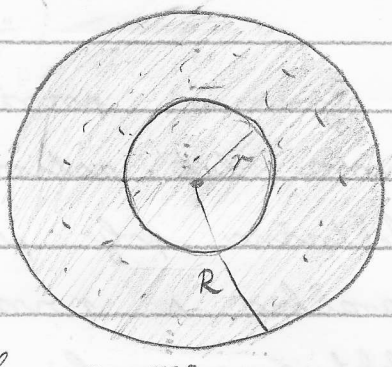
$$\boxed{\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ → diferencijalni oblik 1. Maxwellove jednadžbe

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_u}{\varepsilon_0}}$$ → integralni oblik 1. Maxwellove jednadžbe

OKRENI

⇒ sada smo uvel sve potrebno, pa primjenimo to na zadatak:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{uS}}{\varepsilon_0}$$



↳ uzmimo manju kuglu polumjera r:

$$\oint_{S_r} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{uS_r}}{\varepsilon_0}$$

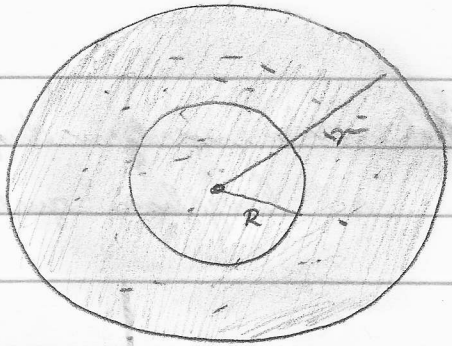
$$\oint_{S_r} E\, dS = E \oint_{S_r} dS = E(r) \cdot 4r^2\pi$$

↳ primjenimo volumnu gustoću naboja:

$$\frac{Q_0}{V_R} = \frac{Q_{uS_r}}{V_r} \Rightarrow Q_{uS_r} = Q_0 \cdot \frac{V_r}{V_R} = Q_0 \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r & r < R \\ \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & r = R \\ ? & r > R \end{cases}$$

↳ još trebamo dornati kolika je električno polje izvan kugle



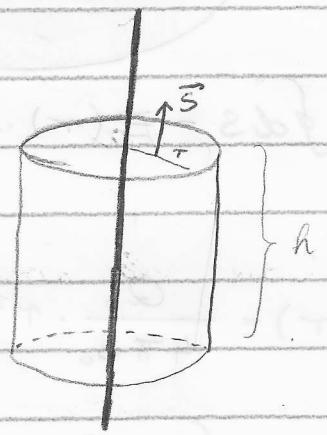
$$\oint \vec{E} d\vec{S} = E \oint dS = E(r) \cdot 4r^2\pi = \frac{Q_{inside\ S_r}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot r^2$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r & r < R \\ \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & r = R \\ \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2} & r > R \end{cases}$$

PR: (4.5) Izračunajte električno polje duge ravne jednoliko nabijene žice s linijskom gustoćom naboja $\lambda = \frac{Q}{l}$!

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{Q}{L}$$



$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{uS}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{plašt} \vec{E}\, d\vec{S} + \int_{baze} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{uS}}{\varepsilon_0}$$

↳ silnice koje nisu okomite na vektor površine baze se međusobno poništavaju

$$\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \oint_{baze} \vec{E}\, d\vec{S} = 0$$

$$\int_{plašt} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{uS}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$$

↳ vrijedi da je $\vec{E} \parallel d\vec{S}$, pa je:

$$\int_{plašt} \vec{E}\, d\vec{S} = \int_{plašt} E\, dS = E \int_{plašt} dS = E \cdot 2r\pi h$$

$$E \cdot 2r\pi h = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2r\pi\varepsilon_0}$$

RAD U ELEKTRIČNOM POLJU

⇒ definicija rada:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

⇒ za konzervativne sile vrijedi:

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

↳ npr. Coulombova sila:

$$\vec{F}_c = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r} \quad ; \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

⇒ izračunajmo rad kada od početnog do konačnog stanja savladavamo silu $\vec{F}_c$:

$$W_{p \to k} = \int_p^k \vec{F}_c \, d\vec{r} = k Q_1 Q_2 \int_p^k \frac{\hat{r}}{r^2} (\hat{r} \, dr)$$

$$W_{p \to k} = k Q_1 Q_2 \int_p^k \frac{dr}{r^2} = -k Q_1 Q \cdot \frac{1}{r} \Big|_p^k$$

$$W_{p \to k} = -\left[\underbrace{k \frac{Q_1 Q_2}{r_k}}_{E_p^{(k)}} - \underbrace{k \frac{Q_1 Q_2}{r_p}}_{E_p^{(p)}} \right]$$

↳ odavde možemo napisati potencijalnu energiju:

$$\boxed{E_p(r) = k \frac{Q_1 Q_2}{r}}$$

↳ također, možemo uvesti potencijal:

$$W = Q_1 \left(k \cdot \frac{Q_2}{r} \right) \Big/ : Q_1$$

$$\frac{W}{Q} = \varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = k \cdot \frac{Q}{r}}$$

↳ napon se definira kao razlika potencijala:

$$U = \varphi_2 - \varphi_1$$

⇒ upamti da iz potencijalne energije uvijek možemo dobiti silu preko gradijenta:

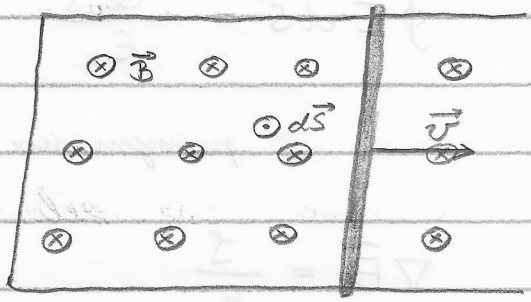
$$F = -\nabla E_p$$

ELEKTRIČNA STRUJA

ELEKTROMOTORNA SILA

$$W = \oint \vec{F}\, d\vec{\ell}$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$



$$EMS = \mathcal{E} = \frac{W}{q} = B\ell v$$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\, d\vec{\ell} = B\ell v = B\ell \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(B\ell x)$$

$$= \frac{d}{dt} BS = \frac{d}{dt}\left(-\vec{B}\cdot\vec{S}\right) = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{S}$$

⇒ odavde vraćanjem 4. Maxwellovu jednadžbu:

$$\boxed{\oint \vec{E}\, d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{S}}$$

→ drugačiji zapis:

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\Phi_m}$$

REZIME MAXWELLOVOG OPISA ELEKTROMAGNETIZMA

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{uS}}{\varepsilon_0}$$

↳ primjenimo Gaussa za $\vec{E}$

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

} 1. Maxwellova jednadžba

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

↳ primjenimo Gaussa za $\vec{B}$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

} 2. Maxwellova jednadžba

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}\, d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E}\, d\vec{S}$$

↳ Maxwell eksperimentom pokazuje:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

} 3. Maxwellova jednadžba

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}$$

} 4. Maxwellova jednadžba

⇒ ovim opisima, dodani su bitni zakoni:

↳ <u>Ohmov zakon</u>:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

↳ <u>Jednadžba kontinuiteta</u>:

$$\nabla \vec{J} = -\frac{d}{dt}\rho$$

↳ <u>Lorentzova sila</u>:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

⇒ s obzirom da se radi o valovima:

$$\rho = 0, \quad J = 0$$

⇒ napišimo Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku:

$$\nabla E = 0$$

$$\nabla B = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

⇒ trebamo jedan Laplaceov matematički operator:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

↳ za kartezijeve koordinate stoga vrijedi:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

⇒ vratimo se u radnju Maxwellovu jednadžbu:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \underbrace{(\nabla \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t} \vec{E} = 0}$$

↳ vremena jednodimenzionalnost: $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{E}(x,t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(x,t) = 0$$

$$\frac{1}{v_{EM}^2} \Rightarrow v_{EM} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

ovo se izračuna i dobije se:

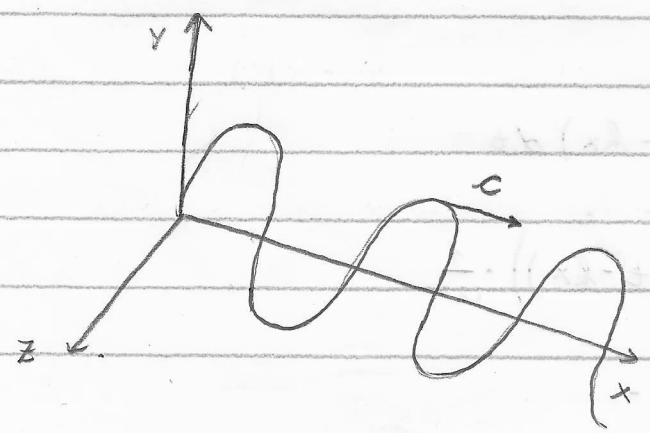
$$\boxed{v_{EM} = c}$$

↳ tada je zaključeno da je svjetlost elektromagnetski val što nije bilo jasno u to vrijeme

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$$

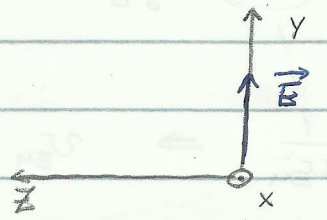
$$\nabla \vec{E} = 0$$

↳ ovo primjenimo i dobivamo se da je smjer titranja vala okomit na smjer širenja vala



⇒ ostaje odgovorit na koj način tetra magnetska polje:

↳ radi jednostavnosti, promatramo slučaj:



$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

↳ za naš slučaj:

$\vec{k} = (k_x, 0, 0)$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \cos(\dots) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}E_0 \cos(\omega t - kx)\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\cdot 0 + \frac{\partial}{\partial x}\cdot 0\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_0 \cos(\omega t - kx) - \frac{\partial}{\partial y}\cdot 0\right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{k}\, E_0 (-1) \sin(\omega t - kx)(-k)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{k}\, k E_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$-B = \hat{k}\, E_0 k \int \sin(\omega t - kx)\, dt$$

$$B = \hat{k}\, E_0 k \left(-\cos(\omega t - kx)\right) \cdot \frac{1}{\omega}$$

↳ primjetimo sljedeće:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot 2\pi \cdot \nu} = \frac{1}{\lambda \cdot \nu} = \frac{1}{c}$$

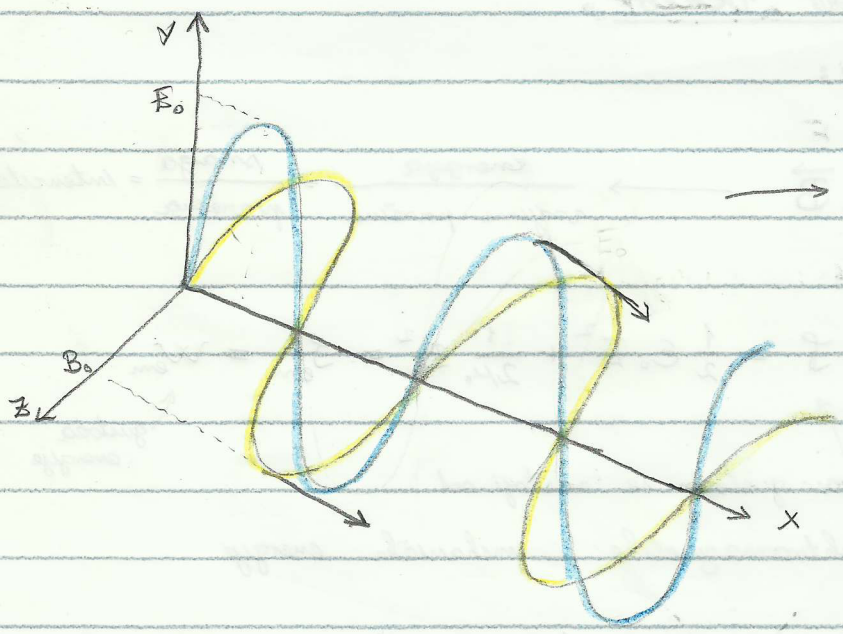
↳ slijedi:

$$B = \hat{k}\,\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)$$

$\frac{E_0}{c} \rightarrow B_0$

$$\boxed{B(x,t) = \hat{k}\,B_0\cos(\omega t - kx)}$$

↳ vidimo da je magnetsko polje okomito na električno polje te je njegov smjer titranja također okomit na smjer širenja vala.



→ napomena: ovdje bi u formulama trebao biti sinus kako bi u trenutku $t = 0$ bilo jednako nula

ENERGIJA I SNAGA KOD ELEKTROMAGNETSKOG VALA

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = dq\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}\, dt$$

↳ snaga:

$$P = \frac{dW}{dt} = \int (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\, \vec{v}\, dq$$

$$P = \int (\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{=0})\, \vec{v}\, \rho \cdot dV$$

$$P = \int \vec{E}\, \vec{v}\, \rho\, dV - \int \vec{E}\, \vec{J}\, dV$$

⇒ uvedimo <u>Poyntingov vektor</u>:

↳ po definiciji:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \longrightarrow \frac{\text{energija}}{\text{vrijeme} \cdot \text{površina}} = \frac{\text{snaga}}{\text{površina}} = \text{intenzitet}$$

$$\nabla \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \rho_{em} = w_{em}$$

w_{em} ← gustoća energije

ova gustoća se sastoji od elektromagnetske i mehaničke energije

⇒ izračunajmo Poyntingov vektor za sljedeće:

$$\vec{E}(x,t) = \hat{j}\, E_0 \cos(\omega t - kx)$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k}\, B_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left[\hat{j}\, E_0 \cos(\omega t - kx)\right] \times \left[\hat{k}\, B_0 \cos(\omega t - kx)\right]$$

$$\vec{S} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}\, i \cos^2(\omega t - kx)$$

↳ vremensku apsolutnu i srednju vrijednost koju nam je u stvarnosti bitna za intenzitet:

$$|\overline{\vec{S}}| = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}\, \overline{\cos^2(\omega t - kx)}$$

$$|\overline{\vec{S}}| = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow |\overline{\vec{S}}| = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0$$

$$B_0 = \frac{1}{c} E_0$$

$$|\overline{\vec{S}}| = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{1}{c} E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0 c^2} E_0^2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$$

$$S_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{c^2} \cos(\omega t - kx)$$

$$\boxed{u_{em} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)} \Rightarrow \overline{u_{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

OPTIKA

⇒ dijeli se na:

a) geometrijsku optiku

b) fizikalna (valna) optika

⇒ znamo da je svjetlost elektromagnetski val

↳ to je pokazao Hertz iz rezultata:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

⇒ geometrijska optika je možda danas suvišna jer znamo da je svjetlost elektromagnetske prirode

↳ ipak, promatrati ćemo geometrijsku optiku jer je ona prethodila valnoj optici

GEOMETRIJSKA OPTIKA

⇒ <u>zakon geometrijske optike:</u>

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{E}{B}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{E}{B}\right) = 0 \quad ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

↳ za prazno sredstvo: $\left.\begin{matrix}\varepsilon_r = 1 \\ \mu_r = 1\end{matrix}\right\} c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

↳ vrijedi i sljedeće za sva sredstva:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} < c \quad ; \quad \sqrt{\varepsilon_r} > 1$$

↳ ovu jednadžbu možemo napisati ovako:

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

„n" → indeks loma

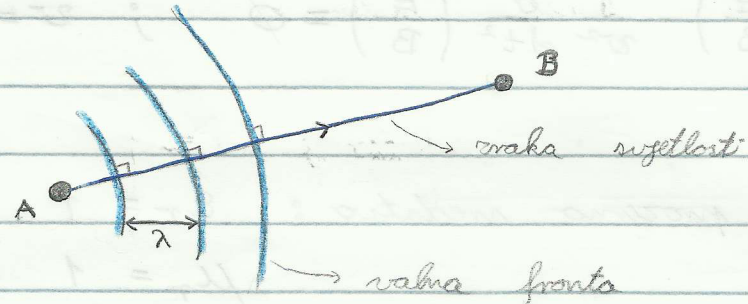
⇒ NAPOMENA: jednadžba $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ nije potpuno točna, jer se ne uzima potpuna elektromagnetska priroda svjetlosti

↳ većina $\sqrt{\varepsilon_r}$ može se promatrati kao odaziv sredstva na elektromagnetski val

⇒ 1. ZAKON GEOMETRIJSKE OPTIKE:

↳ svjetlost se u prozirnom sredstvu širi pravocrtno

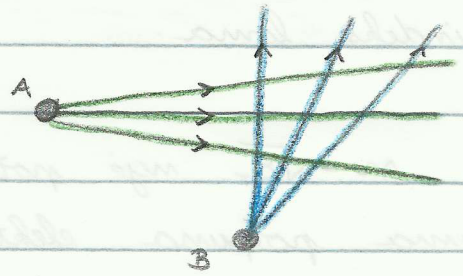
⇒ ovim zakonom promatramo svjetlost kao zrake



⇒ 2. ZAKON GEOMETRIJSKE OPTIKE:

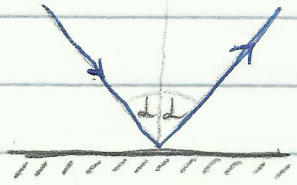
↳ svjetlost se širi na način da snop zraka jednog izvora ne utječe na snop zraka drugog izvora

⇒ ovo je isto aproksimacija, ali je prihvatljiva



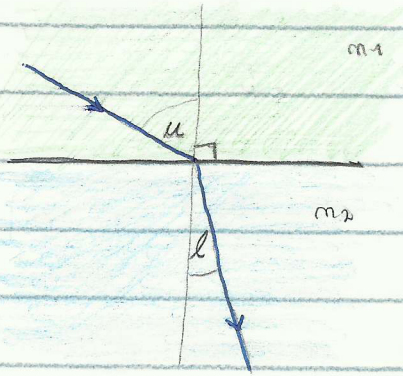
⇒ 3. ZAKON GEOMETRIJSKE OPTIKE:

↳ svjetlost se od uglačane površine reflektira na način da upadna zraka, okomica i reflektirana zraka leže u istoj ravnini te je kut refleksije jednak kutu upada



⇒ 4. ZAKON GEOMETRIJSKE OPTIKE:

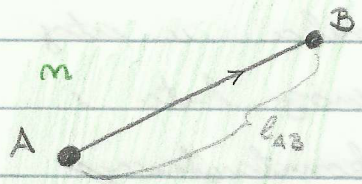
↳ prilikom loma svjetlosti vrijedi da su upadna zraka, okomica i lomljena zraka u istoj ravnini i omjer sinusa upadnog kuta i sinusa kuta lomljenog kuta konstantan //



$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

FERMATOV PRINCIP



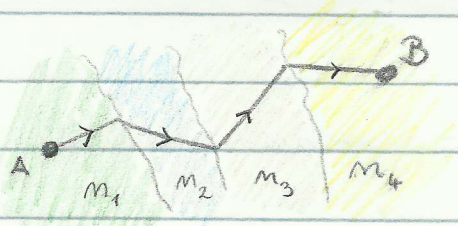
$$L = n\, l_{AB}$$

↳ optički put

$$l_{AB} = v \cdot t_{AB} = \frac{c}{n} \cdot t_{AB}$$

$$t_{AB} = \frac{n}{c} \cdot l_{AB} = \frac{L}{c}$$

⇒ prikažimo malo kolje što je optički put:



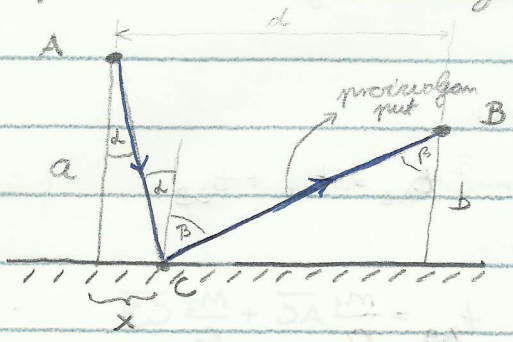
$$dt = \frac{dL}{dn} \quad \Rightarrow \quad t_{AB} = \int_A^B \frac{dL}{c} = \int_A^B \frac{n\, dl_{AB}}{c}$$

⇒ FERMATOV PRINCIP:

↳ svjetlost će uvijek izabrat takav put od točke A do točke B da joj za taj put treba minimalno vrijeme //

⇒ naziva se još i princip minimalnog vremena

⇒ kako bi dokazali da : ovaj princip vrijedi, tako možemo pokazati da vrijedi zakon refleksije :



↳ uzeli smo neki nasumičan put

↳ svjetlost sama izabire točku C → po Fermatovom principu, to izabere tako da joj vrijeme od A do B najmanje

$$t_{AB} = \frac{n}{c}\int_A^B dl_{AB} = \frac{n}{c}\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right)$$

$$\frac{dt_{AB}(x)}{dx} = 0 \longrightarrow \text{nalazimo ekstrem}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{n}{c}\left(a^2+x^2\right)^{1/2} + \frac{n}{c}\left[(d-x)^2+b^2\right]^{1/2}\right] = 0$$

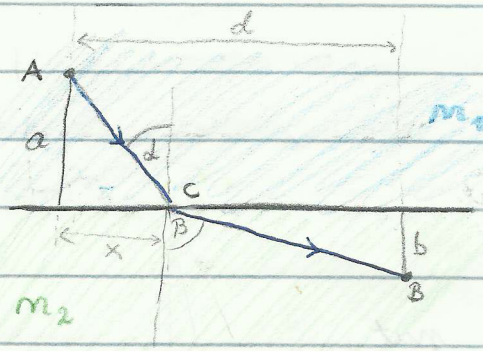
$$\vdots$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

↳ iz ovoga slijedi : $\sin\alpha = \sin\beta$

$$\alpha = \beta$$

⇒ na ovaj način dokazujemo da Fermatov princip vrijedi ako dokažemo princip loma svjetlosti:



$$t_{AB} = t_{AC} + t_{CB}$$

$$t_{AB} = \frac{n_1}{c}\overline{AC} + \frac{n_2}{c}\overline{CB}$$

$$t_{AB} = \frac{n_1}{c}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(d-x)^2+b^2}$$

↳ ponovno tražimo ekstrem funkcije:

$$\frac{d\,t_{AB}(x)}{dx} = 0$$

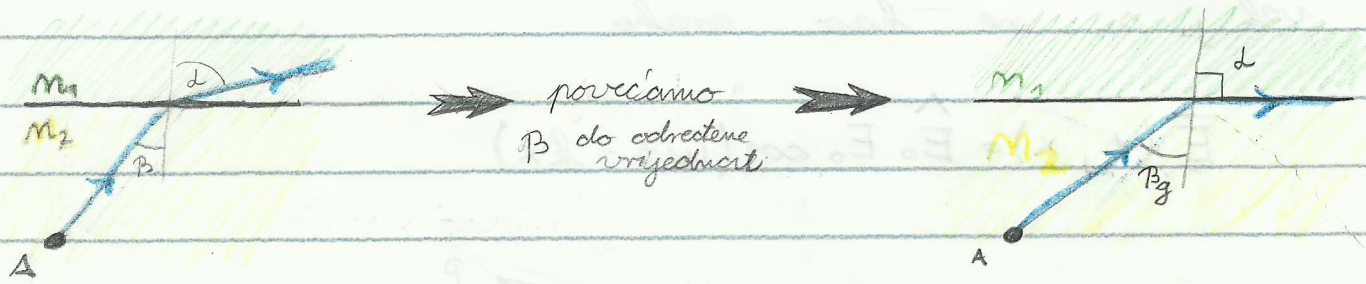
$$\vdots$$

$$n_1 \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = n_2 \cdot \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

TOTALNA REFLEKSIJA



β_g → granični kut totalne refleksije

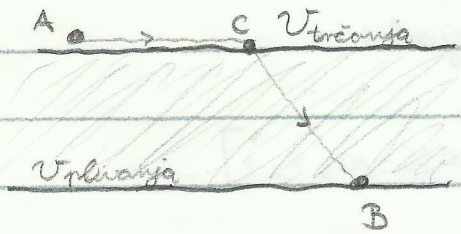
↳ s obzirom da je kut $\alpha = 90°$, vrijedi:

$$\sin \beta_g = \frac{n_1}{n_2}$$

⇒ NAPOMENA:

↳ prinjet da je problem minimalnog vremena svjetlost ustvari mehanički problem

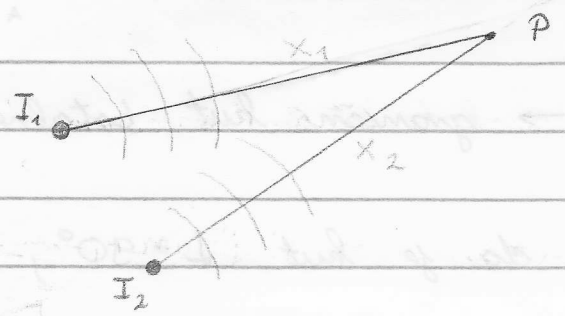
PR: Kako izabrat točku C da vrijeme od A do B bude minimalno?



FIZIKALNA OPTIKA

⇒ sada svjetlost ponovno tretiramo kao elektromagnetski val, a ne kao zraku

$$\vec{E}(t, x) = \hat{E}_0 E_0 \cos(\omega t - kx)$$



↳ na izvor I_1 vrijedi:

$$E_1(t_0, x_1) = E_0 \cos(\omega t_0 - k_1 x_1) = E_0 \cos\left[\omega\left(t_0 - \frac{k_1}{\omega} x_1\right)\right]$$

$$E_1(t_0, x_1) = E_0 \cos\left[\omega\left(t_0 - \frac{x_1}{v_1}\right)\right]$$

$$\frac{k_1}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda_1}}{2\pi\nu} = \frac{1}{\lambda_1 \nu} = \frac{1}{v_1}$$

$$E_1(t_0, x_1) = E_0 \cos\left[\omega\left(t_0 - \frac{n_1 x_1}{c}\right)\right]$$

$$E_1(t_0, x_1) = E_0 \cos\left[\frac{\omega}{c}\left(c t_0 - n_1 x_1\right)\right]$$

↳ analogno na izvor I_2 vrijedi:

$$E_2(t_0, x_1) = E_0 \cos\left[\frac{\omega}{c}\left(c t_0 - n_2 x_2\right)\right]$$

↳ ukupno električno polje u točki P:

$$E_P = E_1 + E_2$$

primjenimo formulu za zbroj kosinusa

$$E_P = 2E_0 \cos\left[\frac{\omega}{c} ct_0 - \frac{\omega}{c}(n_1x_1 + n_2x_2)\right] \cos\left[\frac{\omega}{2c}(n_1x_1 - n_2x_2)\right]$$

↳ izvučemo van amplitudu (neovisna o vremenu):

$$A = 2E_0 \cos\left[\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{c}(n_1x_1 - n_2x_2)}_{\Delta\phi}\right]$$

$\Delta\phi \rightarrow$ razlika faza

$$\Delta\phi = \frac{2\pi x}{\lambda x}(n_1x_1 - n_2x_2)$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(\underbrace{n_1x_1}_{\text{OPTIČKI PUT}} - n_2x_2)$$

↳ uvedimo oznaku za optičku razliku hoda:

$$\delta = n_1x - n_2x$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

↳ konačna amplituda izraza:

$$A = 2E_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\phi\right)$$

⇒ pogledajmo dva granična slučaja amplitude:

a) $A^2 = 4E_0^2$ → konstruktivna interferencija

b) $A^2 = 0$ → destruktivna interferencija

⇒ ako se argument kosinusa kod amplitude $\left(\frac{1}{2}\Delta\phi\right)$ ne mijenja u vremenu, tada govorimo da imamo međusobno koherentne izvore

⇒ MAKSIMUM AMPLITUDE:

$$A = 2E_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\phi\right)$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1x_1 - n_2x_2)$$

↳ maksimum imamo za slučaj:

$$\frac{1}{2}\Delta\phi = m\pi \quad ; \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}(n_1x_1 - n_2x_2) = \frac{\pi}{\lambda}\cdot\delta = m\pi$$

$$\frac{\delta}{\lambda} = m$$

$$\boxed{\delta_{max} = m\lambda}$$

→ maksimalna amplituda dobiva se ako je optička razlika puteva valova svjetlosti jednaka cjelobrojnom višekratniku valne duljine

⇒ MINIMUM AMPLITUDE:

↳ izvodi se na analogan način kao i maksimum

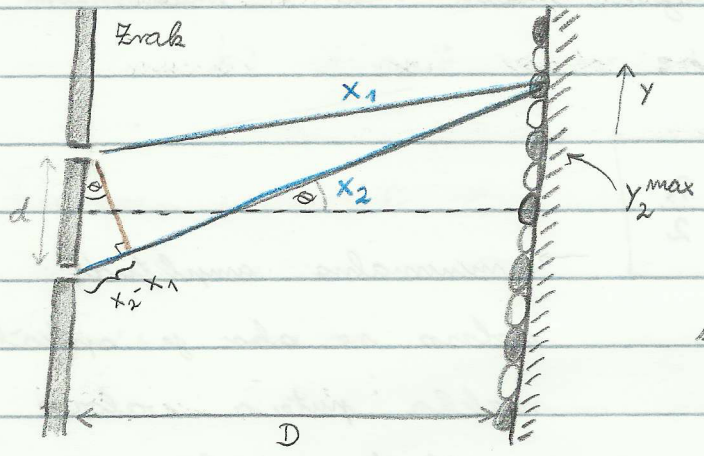
↳ krajnji rezultat je:

$$\delta_{min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

→ minimalna amplituda dolazi se ako je optička razlika puteva valova svjetlosti jednaka neparnom broju polovina valnih duljina

⇒ interferenciju svjetlosti, odnosno minimume i maksimume amplitude valova svjetlosti prikazao je Thomas Young u takozvanom YOUNGOVOM POKUSU

YOUNGOV POKUS



● ⇒ maksimum interferencije

○ ⇒ minimum interferencije

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 x_1 - n_2 x_2)$$

↳ za zrak: $n_1 = n_2 \approx 1$

↳ primjet slijedeće:

$$\delta = |x_1 - x_2| = d \sin\Theta$$

⇒ maksimumi:

$$\frac{1}{2}\Delta\phi = m\pi \quad ; \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\phi = \frac{\pi}{\lambda}\delta = \frac{\pi}{\lambda}\cdot|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{\lambda} d \sin\Theta$$

↓ slijedi

$$\boxed{d \sin\Theta_m^{max} = m\lambda}$$

⇒ minimumi:

$$\boxed{d \sin\Theta_m^{min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}}$$

↳ s obzirom da radimo s malim kutevima, možemo invertirati:

$$\boxed{y_m^{max} = m\lambda \cdot \frac{D}{d}} \qquad \boxed{y_m^{min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{D}{d}}$$

→ aproksimacija: $\left.\begin{array}{l}\sin\Theta = \Theta \\ \tan\Theta = \Theta\end{array}\right\} \sin\Theta = \tan\Theta$

PR: 9.1 Udaljenost rastora od pukotina u Youngovom pokusu je 1.2 m. Razmak pukotina je 3 mm. Na visini od 4.5 cm nalazi se drugi sporedni maksimum. Kolika je valna duljina i razmak između dva susjedna maksimuma?

$D = 1.2\ m$

$d = 0.003\ m$

$Y = 4.5\ cm \rightarrow$ 2. sporedni maximum

$\lambda,\ \Delta Y_{max} = ?$

$A = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta$

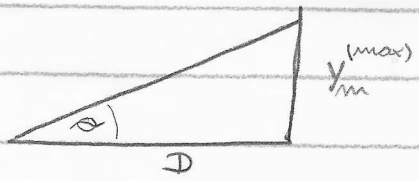
$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\Theta$

↳ za maksimum vrijedi:

$\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\phi}{2} = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin\Theta_m^{(max)} = m\pi$$

$$d \sin\Theta_m^{(max)} = m\lambda$$



$$tg\,\Theta_m^{(max)} = \frac{Y_m^{(max)}}{D} \approx \sin\Theta_m^{(max)} = \frac{m\lambda}{d}$$

$Y_m^{(max)} = m\lambda\frac{D}{d}$; $Y_{m+1}^{(max)} = (m+1)\lambda \cdot \frac{D}{d}$ ← $Y_m^{(max)} = m\lambda \cdot \frac{D}{d}$

$\Delta Y_{max} = Y_{m+1}^{(max)} - Y_m^{(max)}$

$\lambda = \frac{d\,Y_m^{(max)}}{m \cdot \lambda \cdot D}$

$\Delta Y_{max} = \lambda\frac{D}{d}$

$\lambda = 560\ nm$

PR: 9.2 Valne duljine $\lambda_1 = 430\ nm$ i $\lambda_2 = 510\ nm$ padaju na pukotine razmaknute $d = 0.025\ mm$. Udaljenost pukotina od rastera je $D = 1.5\ m$. Odredi $\Delta Y_{m=3}$.

$\lambda_1 = 430\ nm$

$\lambda_2 = 510\ nm$

$d = 0.025\ mm$

$D = 1.5\ m$

$\Delta Y_{m=3} = ?$

$$Y_m^{(max)}(\lambda) = m\lambda\frac{D}{d}$$

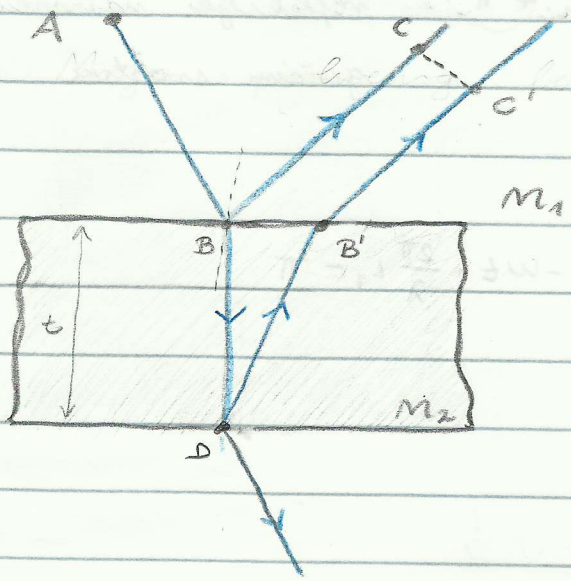
$$Y_{m=3}^{(max)}(\lambda_1) = 3\lambda_1\frac{D}{d} \qquad Y_{m=3}^{(max)}(\lambda_2) = 3\lambda_2\frac{D}{d}$$

$$\Delta Y_{m=3} = 3\lambda_2\cdot\frac{D}{d} - 3\lambda_1\cdot\frac{D}{d}$$

$$\Delta Y_{m=3} = 3\cdot\frac{D}{d}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\Delta Y_{m=3} = 1.44\ cm$$

TANKI LISTIĆI



$n_2 > n_1$

↳ „n_2" je optički gušće sredstvo

↳ ove dvije zrake mogu interferirat:

a) konstruktivno

b) destruktivno (primjena u fotoaparatima za restauraciju slike)

⇒ uvodimo optičke putove:

$$L_1 = \overline{AB} \cdot n_1 + \overline{BC} \cdot n_1$$

$$L_2 = \overline{AB} \cdot n_1 + \overline{BD} \cdot n_2 + \overline{DB'} \cdot n_2 + \overline{B'C'} \cdot n_1$$

↳ vrijede aproksimacije ako je zraka skoro okomita na površinu:

$$B' \to B \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx \overline{B'C'}$$

$$\overline{BD} \approx t \approx \overline{DB'}$$

$$\delta = \overline{AB}\, n_1 + \overline{BD}\, n_2 + \overline{DB'}\, n_2 + \overline{B'C'}\, n_1 - \overline{AB}\, n_1 - \overline{BC}\, n_1$$

↳ uz aproksimacije: $\delta = 2 t n_2$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$\phi_1 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_1 + \pi$$

promjena u fazi zbog reflektira na optički gušćem sredstvu

$$\phi_2 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_2$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_2 - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} L_1 - \pi$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(L_1 - L_2) - \pi$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(-2t n_2) - \pi$$

$$\boxed{\frac{\Delta\phi}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2t n_2 - \frac{\pi}{2}}$$

⇒ BITNO: upamti da se zraka koja se reflektira na optički gušćem sredstvu zakreće u fazi.

PR: Leća od stakla indeksa loma 1.51 prevučena je slojem indeksa loma 1.38. Kolika je minimalna debljina sloja da bi se poništila svjetlost valne duljine $\lambda = 550\ nm$?

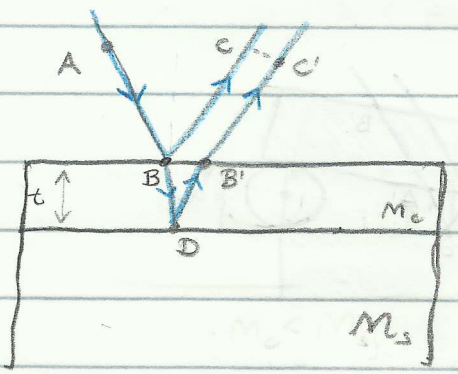
↳ indeks „c" → „coating"

$n_s = 1.51$

$n_c = 1.38$

$\lambda = 550\ nm$

$t = ?$



$$\Phi_1 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_1 + \pi \longrightarrow E_1 = E_0 \cos\Phi_1 = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_1 + \pi\right)$$

$$\Phi_2 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_2 + \pi \longrightarrow E_2 = E_0 \cos\Phi_2 = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_2 + \pi\right)$$

↳ zbrojimo E_1 i E_2 te dobijemo amplitudu:

$$A = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)$$

↳ nas zanima poništavanje, pa mora biti: $\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 0$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \ldots \text{„aproksimacija"} \ldots = -\frac{2\pi}{\lambda} 2t \cdot n_c$$

$$\frac{|\Delta\Phi|}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} t\, n_c \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} t_m^{(min)} n_c = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

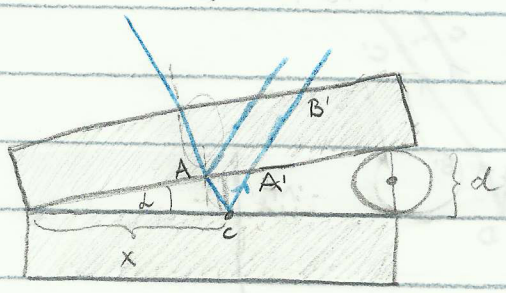
$$t_m^{(min)} = (2m+1)\frac{\lambda}{4n_c} \quad ; \quad m = 0, 1, 2, 3\ldots$$

↳ najmanji t je za $m = 0$:

$$t_m^{(min)} = \frac{\lambda}{4n_c} = 99.6\ nm$$

ovo se naziva „mjet četvrtine valdala"

Pr: 9.6 Dvije ravno staklene pločice duljine 10 cm dodiruju se na jednom kraju, a na drugom su razdvojene niti promjera 0.01 mm tako da se stvara klin zraka. Skoro okomito pada na ploče svjetlost valne duljine 420 nm! Odredi broj pruga N!



$d = 0.01\,mm$

$L = 10\,cm$

$\lambda = 420\,nm$

$N = ?$

$$\Phi_1 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\overline{AB}\, n_s$$

$$\Phi_2 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\overline{AC}\, n_1 + \overline{CA'}\, n_1 + \overline{A'B'}\, n_s\right) + \pi$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \text{aproksimacije} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2Y - \pi \qquad Y = \overline{AC}$$

$$A = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)$$

↳ maksimum imamo za: $\frac{\Delta\Phi}{2} = m\pi$

$$Y_m^{(max)} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\lambda}{2}$$

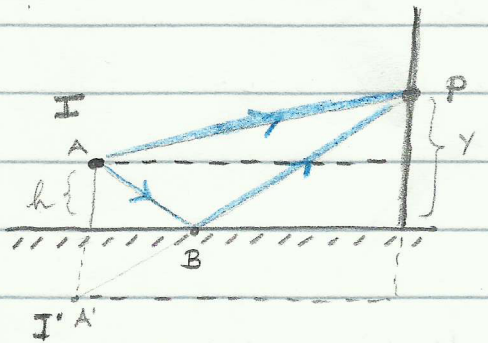
$$\Delta Y_{max} = Y_{m+1}^{(max)} - Y_m^{(max)} = \frac{\lambda}{2}$$

$$N = \frac{L}{\Delta Y_{max}} = \frac{2L}{\lambda}$$

↳ greška u zadatku!

↳ vidi knjigu!

LOYDOVO ZRCALO



$$\overline{AP} = \sqrt{D^2 + (Y-h)^2}$$

$$\overline{A'P} = \sqrt{(h+Y)^2 + D^2}$$

⇒ pogledamo interferencijo v točki P:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$$

$$\Phi_1 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\overline{AP}\, n_1$$

$$\Phi_2 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\overline{AB}\cdot n_1 + \overline{BP}\, n_1\right) + \pi \qquad (\overline{AB}+\overline{BP} = \overline{AP})$$

$$\Delta\Phi = -\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{(h+Y)^2+D^2} + \pi + \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{D^2+(Y-h)^2}$$

OPTIČKA REŠETKA

⇒ iz Youngovog pokusa znamo:

$$A = 2E_0 \cos\frac{\Delta\phi}{2}$$

⇒ ako imamo dvije pukotine, zapravo imamo Youngov pokus:

$$E_1 = E_0 \cos(\underbrace{\omega t - k_1 x_1}_{\phi_1})$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\frac{\lambda_1}{n_1}} = \frac{2\pi}{\lambda_1}\cdot n_1$$

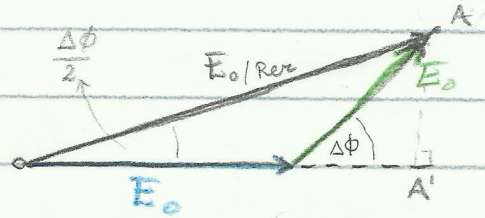
$$E_1 = E_0 \cos\phi_1$$

$$E_2 = E_0 \cos(\omega t - k_2 x_2)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad \Rightarrow \quad \phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi$$

$$E_2 = E_0 \cos(\phi_1 + \Delta\phi)$$

↳ koristimo se fazorima:

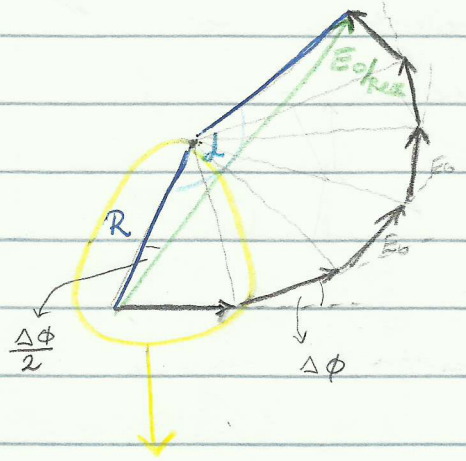


$$\frac{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}{\sin\Delta\phi} = \frac{\frac{\overline{AA'}}{E_0/rez}}{\frac{\overline{AA'}}{E_0}} = \frac{E_0}{E_0/rez}$$

$$\boxed{E_0/_{rez} = E_0 \frac{\sin\Delta\phi}{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}}$$

↳ ovo je oblik koji želimo
(ekvivalentan je onome gore za amplitudu)

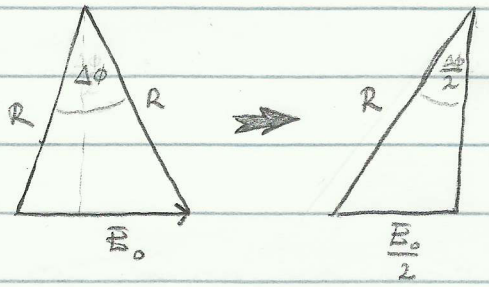
⇒ imamo 6 pukotina, izvedimo ponovno:



$$L = 6\phi$$

$$\sin\frac{L}{2} = \sin\left(6\cdot\frac{\Delta\phi}{2}\right) = \frac{\frac{E_{0/Rez}}{2}}{R}$$

$$\sin\left(6\cdot\frac{\Delta\phi}{2}\right) = \frac{E_{0/Rez}}{2R}$$



$$\sin\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{\frac{E_0}{2}}{R} = \frac{E_0}{2R}$$

$$\frac{\sin\left(6\,\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\frac{\Delta\phi}{2}} = \frac{E_{0/Rez}}{E_0}$$

$$\boxed{E_{0/Rez} = E_0\cdot\frac{\sin\left(6\cdot\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}}$$

⇒ već mjerenja izvesti neke zaključke i provjeriti, za pokušajmo ovo izvesti u općenitosti

⇒ imamo N pukotina:

$$E_{0/Rez} = E_0 \cdot \frac{\sin\left(N \cdot \frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}$$

⇒ INTENZITET:

$$I = C \cdot (\text{„Amplituda“})^2$$

$$I_N = C \cdot E_0^2 \cdot \frac{\sin^2\left(N \cdot \frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}$$

$$N^2 \cdot C \cdot E_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_0}{\mu_0}} = I_0$$

$$I_N = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(N \cdot \frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}$$

↳ kada se javlja maksimum intenziteta:

$$\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 0$$

⋮

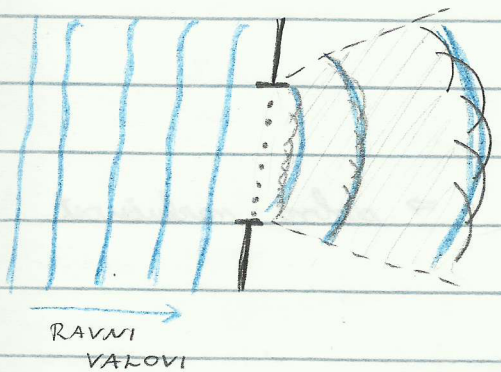
$$d \sin\theta_m^{(max)} = m\lambda$$

d → udaljenost pukotina (međusobno)

$\theta^{(max)}$ → kut pod kojim se vidi maksimum

⇒ najveći intenzitet je u spektru prvog reda, tj. za $m = 1$

↳ to je tako zbog toga što naše pukotine nisu beskonačno male, pa svaka od njih ima puno malih, „elementarnih" izvora



→ primjeti da vidje već možemo vidjeti ogib svjetlosti

↳ minimum intenziteta:

$$N \cdot \frac{\Delta\phi}{2} = m\pi$$

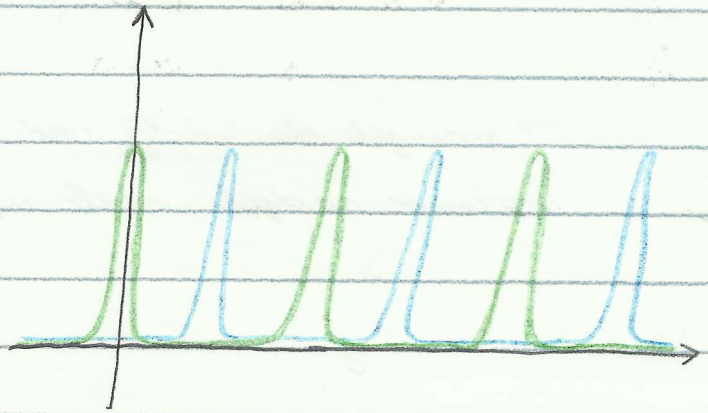
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

$$N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta_m^{(min)} = m\pi$$

$$\boxed{d \sin\theta_m^{(min)} = m \cdot \frac{\lambda}{N}} \qquad m \neq \pm N$$

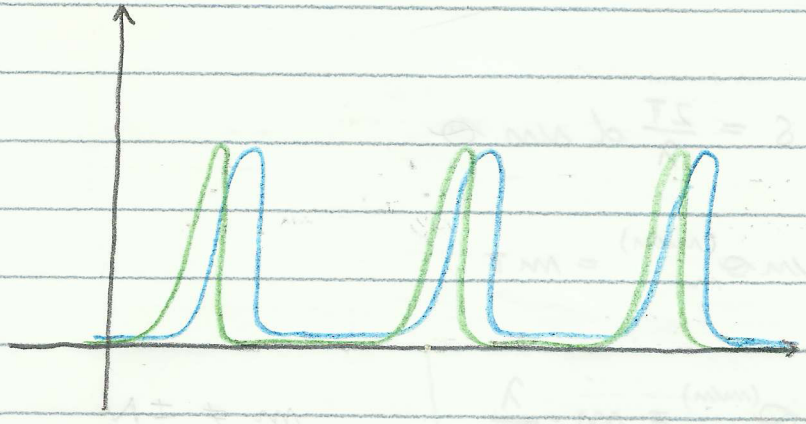
$$N = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

⇒ ako nam se valovi preklapaju tako da kada je jedan u maksimumu, drugi je u minimumu, onda lagano možemo odrediti kada je koji u minimumu, a kada u maksimumu – to se naziva DOBRA RAZLUČIVOST



⇒ dobra razlučivost

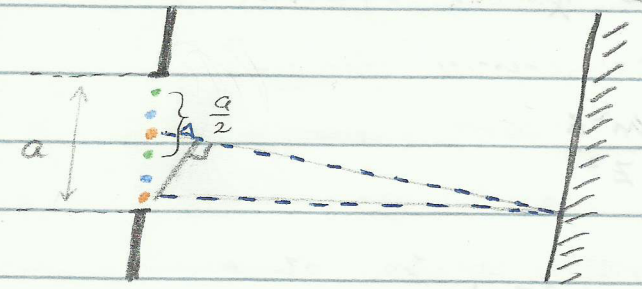
⇒ kada nam se valovi djelomično preklapaju, onda imamo lošu razlučivost



⇒ loša razlučivost

DIFRAKCIJA

(ogib)



$$\delta = d \sin\theta$$

↳ u našem slučaju:

$$\Delta = \frac{a}{2} \sin\theta$$

⇒ podijelili smo pukotinu na parove izvora međusobno udaljene za $\frac{a}{2}$

⇒ sada pustimo da nam broj izvora teži u beskonačnost:

$$N \longrightarrow \infty$$

$$\Delta x \longrightarrow 0 \qquad \rightarrow \text{međusobna udaljenost 2 izvora}$$

$$N \cdot \Delta x = a$$

↳ pogledajmo intenzitet:

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\Delta\phi\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} N \Delta x \sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x \sin\theta\right)}$$

↳ za male kutove: $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\boxed{I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta\right)^2}}$$

↳ pogledajmo sada slučajeve minimuma i maksimuma

⇒ Maksimumi:

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 z}{z^2} \quad ; \quad z = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\Theta$$

$$\frac{dI}{dz} = 0 = I_0 \cdot \frac{d}{dz} \cdot \frac{\sin^2 z}{z^2}$$

$$I_0 \left(\frac{1}{z^2} 2 \sin z \cos z - 2 \cdot \frac{\sin^2 z}{z^3} \right) = 0$$

↳ uz aproksimacije:

$$\operatorname{tg} z - z = 0 \quad \rightarrow \text{ovo nije trivijalno riješiti - treba koristiti geometriju //}$$

⇒ DIFRAKCIJA KOD OPTIČKE REŠETKE:

$$\boxed{I = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin\Theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin\Theta\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin\Theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin\Theta\right)^2}}$$

interferiet N izvora — difrakcija

$d \rightarrow$ razmak dviju pukotina

MODERNA FIZIKA

⇒ u nju spadaju:

- Specijalna teorija relativnosti
- Kvantna fizika
- Nuklearna fizika
- Čvrsto stanje - fizika materijala

⇒ vrlo često se dogodilo da je eksperiment prethodio nekoj teoriji

↳ ovo se dogodilo upravo kod zakona vraćenja što je naše sljedeće poglavlje

ZAKONI ZRAČENJA

⇒ ovdje se je promatralo crno tijelo, tj. idealno apsolutno crno tijelo

↳ Stefan i Boltzmann su eksperimentom ustanovili da je intenzitet zračenja proporcionalan s četvrtom potencijom apsolutne temperature ugrijanog tijela:

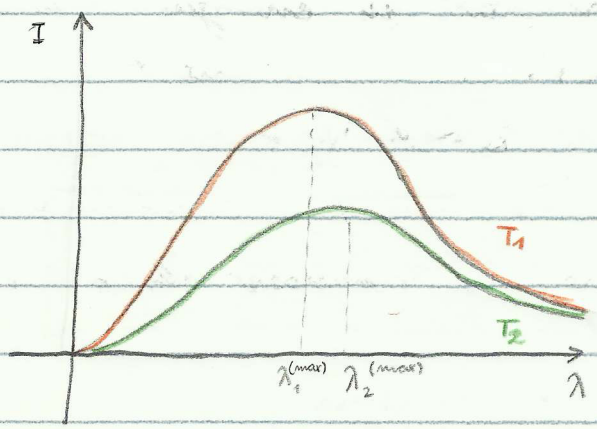
$$I = \sigma \cdot T^4$$

⇒ Stefan - Boltzmannov zakon

σ → Stefan - Boltzmannova konstanta

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ W/m^2K^4$

⇒ raspodjela intenziteta po valnim duljinama:



$T_2 < T_1$

$\lambda_2^{(max)} > \lambda_1^{(max)}$

↳ ustanovilo se da je $\lambda_1^{(max)} \cdot T_1 = T_2 \cdot \lambda_2^{(max)}$, te je Wien to eksperimentalno pokazao i rapisao

$$\lambda_i^{(max)} \cdot T_i = k_W$$

⇒ WIENOV ZAKON

k_W → constant

⇒ Rayleigh i Jeans su uspjeli povezat matematički račun i funkciju intenziteta u ovisnosti o temperaturi i valnoj duljini:

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi}{\lambda^4} c k T$$

↳ no, ova funkcija nije odgovarala stvarnom ponašanju te se je ovo nazvalo ULTRAVIOLETNA KATASTROFA

↳ ustanovilo se da još nešto „fali" za racionalnu teoriju

⇒ Wien je također pokušao opisati ultraljubičastu katastrofu formulom dobivenu eksperimentom:

$$f(x, \lambda) \sim \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{b}{k} \cdot T}$$

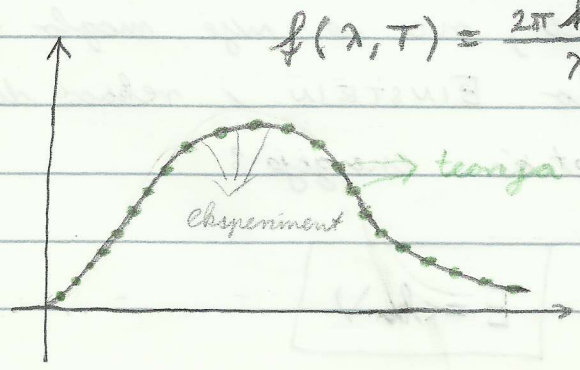
⇒ konačan korak dovro je PLANCK:

↳ on je uveo kvantizaciju energije (energija je stoga diskretna): → constant

$$E = h \cdot \nu$$

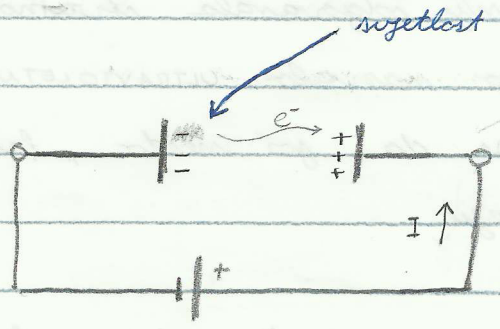
↳ pomoću svoje teorije, uspio je dobit PLANCKOV ZAKON ZRAČENJA koj se u potpunosti slaže sa eksperimentom:

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}$$



FOTOEFEKT

⇒ nakon što je uspjelno opisao zračenje crnog tijela, Planck je krenuo istraživat druge pojave sa novom spoznajom kvantizacije energije



→ struja je proporcionalna intenzitetu svjetlosti

⇒ pomoću zračenja kondenzatora sa svjetlosti tvorio se strujni krug jer se elektroni počnu izbijati

⇒ elektron ne akumulira energiju

↳ ako je dolio dovoljno energije, on iskače, a ako ne, on ostaje na istom mjestu (putanji), a ne mijenja ju za neku manju vrijednost

↳ ovo klasična fizika nije mogla objasniti

⇒ pokus sa kondenzatorom su radili na način da mjere zaustavni napon elektrona za različite intenzitete svjetlosti

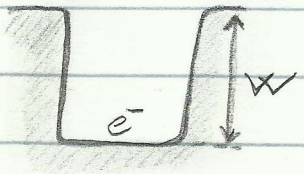
↳ rezultat je bio čudan i samo sa velikim povećanjem svjetlosti, ovo se nije moglo razumjeti

↳ tada je došao EINSTEIN i rekao da je svjetlost skup paketića energije:

$$E = h\nu$$

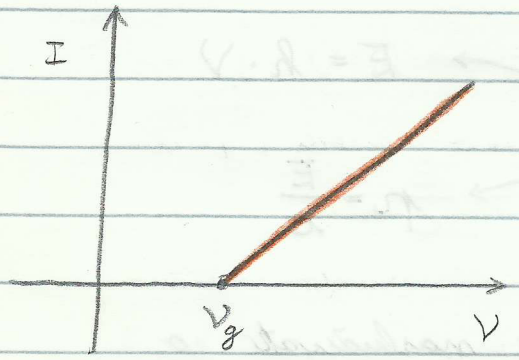
↳ rekao je da je energija „paketića" jednaka zbroju „dubine" potencijalne jame elektrona i kinetičke energije elektrona prilikom izlaza:

$$E = h \cdot \nu = W + E_{kin}$$

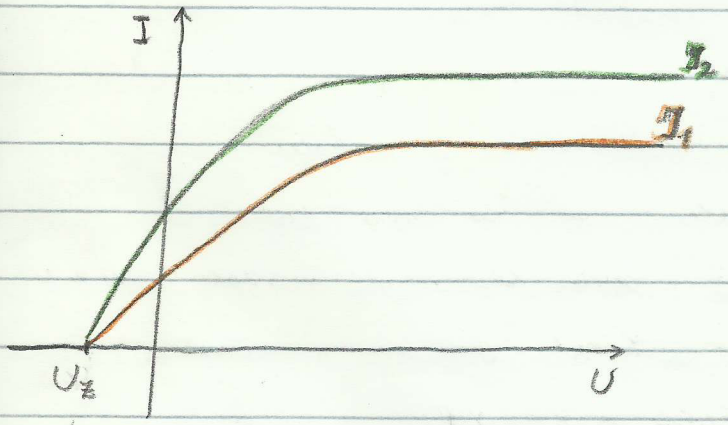


$W \rightarrow$ (dubina potencijalne jame), energija vezanja, energija izlaznja

⇒ pogledajmo grafove:



⇒ ispod granične frekvencije ν_g energija nije dovoljno velika da li elektron izleti iz ploče kondenzatora



↳ zaustavni napon

⇒ pokazalo se da je za malo područje intenziteta zaustavni napon elektrona jednak; to je bio dokaz da energija dolazi u „paketićima"

↳ KVANTIZACIJA ENERGIJE

$$E_k^{(max)} = e U_z$$

COMPTONOV EFEKT

⇒ elektron u materijalu se bombardira sa paketićima energije (fotonima):

$$\text{foton} + e^- \longrightarrow \text{foton}' + e^-$$

λ $\qquad$ λ'

↳ pokazalo se: $\lambda \neq \lambda'$

↳ ovo klasična fizika nije mogla objasniti

↳ zaključilo se da foton ima i količinu gibanja i energiju:

$$\text{foton} \rightarrow E = h \cdot \nu$$

$$\text{foton} \rightarrow p = \frac{E}{c}$$

↳ tu se je počelo naslućivati o VALNO-ČESTIČNOJ prirodi svjetlosti

ATOMSKA STRUKTURA

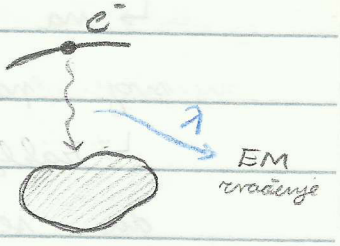
⇒ svi metali (a i elementi) imaju svoj prepoznatljiv spektar elektromagnetskog zračenja

↳ J. J. BALMER je pomoću spektra vodikovog atoma dobio formulu (nije bilo osobitog dijanjenja formule):

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad ; \quad n = 3, 4, 5, 6, \ldots$$

↳ ova se formula dobro poklapa s eksperimentom iako je njezina korektnost upitna

n	λ - Balmer / nm	λ - experiment / nm
3	656.208	656.210
4	486.080	486.074
5	434.000	434.010
6	410.130	410.120



⇒ J. J. THOMSON:

↳ dao je strukturu atoma pomoću „kolača sa grožđicama" (grožđice su elektroni)

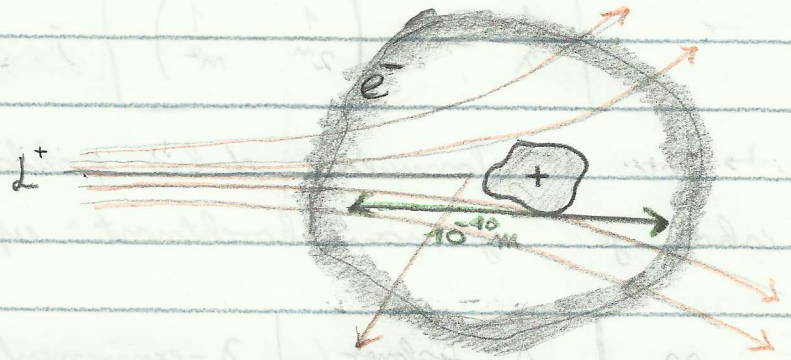
↳ no, ovaj model nije uspješno opisao točno odrečene valne duljine zračenja - energija nije bila kvantizirana (Thomson nije znao za energetske razine elektrona)

⇒ RUTHERFORD:

↳ gadao je tanke listiće zlata L^+-česticama

↳ na osnovu odbijanja L^+-čestica, mogao je složiti sliku atoma:

- pozitivna jezgra
- golemi prazni prostor
- negativan omotač



⇒ N. BOHR:

↳ na osnovu Rutherfordovog modela je dao svoj poboljšani model

↳ zaključio je da ako elektron poludima da se gibа prema jezgri, on bi u spiralnoj putanji pao na jezgru i cijelom tom spiralom bi trebao zračit kontinuiranim valnim duljinama

↳ on je uvidio da to nije tako na temelju Balmerove formule i dao je postulate:

1) elektron u stacionarnom stanju (r, v) ne zrači elektromagnetske valove

2) kutna količina gibanja elektrona je kvantizirana: $L = r_n p_n = r_n m v_n = n \cdot \frac{h}{2\pi}$

$(n = 1, 2, 3, 4 \ldots)$

3) prilikom prelaska sa više u nižu energetsku razinu, elektron emitira foton, a pri prelasku sa niže u višu apsorbira foton: $h \cdot \nu = E_{više} - E_{niže}$



a) EMISIJA

b) APSORPCIJA

↳ stoga Bohr je uveo:

- kvantizirane staze
- kvantizirane energije

↳ naime, Bohrov model je radio dobro za jednostavan vodikov model, ali kod atoma sa mnoštvom staza javljaju se ozbiljne pogreške

DUALNOST SVJETLOSTI

⇒ svjetlost se manifestira kao:

a) **val** (difrakcija, optička rešetka, ...)

b) **čestica** (fotoefekt, Comptonov pokus, ...)

⇒ nadalje, kvantna se opisivati dualnost elektrona i zaključilo se da i elektron ima valnu prirodu jer interferiraju u jednoj vrsti Youngova pokusa

↳ stoga, L. DE BROGLIE je dao formulu za kolčinu gibanja:

$$p = \frac{h}{\lambda} = mv$$

↳ DE BROGLIJEVA RELACIJA

⇒ kada ćemo računati energiju, moramo se koristiti relativističkim relacijama:

$$E = mc^2 + E_k$$

mc^2 ↑ energija mirovanja

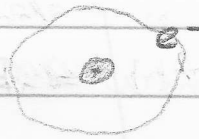
E_k ↑ energija gibanja (različito od $\frac{1}{2}mv^2$)

⇒ vidimo da je De Broglie mehaničkoj karakteristici čestice pridružio valna svojstva

KVANTNA MEHANIKA

⇒ kvantna mehanika počiva na sljedećim otkrićima:

a) Rutherfordov model:



b) de Broglieva relacija:

$$p = \frac{h}{\lambda} = m v^2$$

c) Planckova jednadžba: $E = h\nu = \hbar\omega$

d) **valna jednadžba:**

↳ jedna dimenzija:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\right)\vec{E}(t,x) = 0$$

$$\vec{E}(t,x) = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\vec{E} = -k^2\vec{E}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{E} = i\omega\vec{E} = -\omega^2\vec{E}$$

$$-k^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\vec{E} = 0$$

$$\boxed{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0}$$

↳ disperzona relacija elektromagnetskog vala

⇒ pogledalmo elektron sa prinjenom kvantne mehanike:

$$E = E_k$$

de Brolyina relacija

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{m} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m}$$

$$E = \hbar\omega$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 \cdot k}{2m} \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

↳ na omaru oroga imamo Schrödingerovu jednadžbu

⇒ za elektron moramo naći neku relaciju koja vrijedi:

- klasičnu relaciju: $E = \frac{p^2}{2m} + E_p$
- Planckovu relaciju: $E = \hbar\omega$
- de Broglieovu relaciju: $p = \frac{h}{\lambda} = mv$

↳ uzmimo da je $E_p = 0$ i imamo jednadžbu ravnog vala:

$$\Psi(t, x) = A_0 e^{i(kx + \omega t)}$$

↳ znamo da vrijedi:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega$$

↳ krenimo derivirati jednodimenzionalnu jednadžbu ravnog vala:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = ik\psi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = (ik)^2\psi = -k^2\psi \quad / \cdot \frac{-\hbar^2}{2m}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi \; ; \quad \hbar\omega\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

↳ dalnjim uvrštavanjem dobivamo relaciju:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)$$

⇒ u općenitosti, ova jednadžba glasi ovako:

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_p\right)\psi(t,x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)}$$

↓

SCHRÖDINGEROVA JEDNADŽBA

↳ njezino rješenje je kompleksna funkcija

↳ kako interpretirati rješenje da dobijemo smislen fizikalni rezultat?

⇒ interpretacija M. Bohra: (PROBABILISTIČKA INTERPRETACIJA)

↳ „Sama funkcija ψ nema fizikalno značenje. Kvadrat te funkcije je vjerojatnost da će se elektron naći u području $\langle x, x + dx \rangle$."

$$\psi^2 \in \mathbb{R}$$

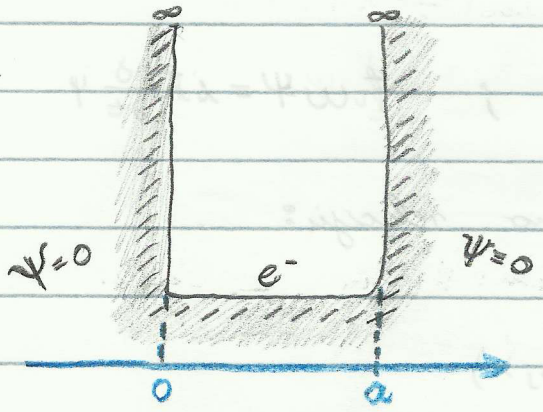
JEDNODIMENZIONALNA BESKONAČNA POTENCIJALNA JAMA

⇒ elektron se nalazi u beskonačnoj jami - ne možemo ga izbaciti van ma koliku energiju mu davedemo

↳ ovo nam služi za pokazivanje rješenja Schrödingerove jednadžbe

↳ rješenje Schrodingerove jednadžbe mora biti:

- jednoznačno
- neprekinuto
- konačno



$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+0\right)\Psi(t,x)=i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(t,x)$$

$$\Psi(t,x)=\psi(t)\cdot\chi(x)$$

$$\frac{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\chi(t)\,\psi''(x)}{\chi(t)\,\psi(x)}=\frac{i\hbar\,\psi(x)\,\chi'(t)}{\chi(t)\,\psi(x)}$$

↳ rješavanjem diferencijalnih jednadžbi dobivamo:

$$\boxed{\chi(t)=C\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}$$

↳ pomoću rubnih uvjeta $\psi(0)=0$, $\psi(a)=0$ dobivamo izraz za energiju iz jednadžbe $\psi''+k^2\psi=0$

te možemo zaključiti da je energija stvarno

kvantizirana i glasi:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

↳ znamo da je: $\Psi_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$

↳ „B" nije određen

$\Rightarrow |\Psi(t,x)|^2$ je gustoća vjerojatnosti da se čestica nađe u nekom određenom području

$$\int_x^{x+dx} |\Psi(t,x)|^2 \, dx$$ ⇒ ovaj integral stoga daje vjerojatnost da se čestica nađe u intervalu $[x, x+dx]$

↳ pogledajmo općenito područje gdje se neka čestica nalazi (integral od $-\infty$ do ∞):

$$P(\check{c} \in \langle -\infty, \infty \rangle) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \, dx$$

↖ vjerojatnost

↳ za naš slučaj potencijalne jame:

$$P(e \in [0, a]) = 1 = \int_0^a |\Psi(t,x)|^2 \, dx$$

↳ pogledajmo dobiveno ukupno $\Psi(t,x)$:

$$\Psi(t,x) = \psi(x) \cdot \chi(t) = B \sin(kx) \cdot C e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

↳ koristimo rubne uvjete :

$$\psi(a) = 0 = B \sin(k \cdot a) \Rightarrow k \cdot a = n\pi$$

$$n\pi = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}$$

↳ ovo smo izračunali za prethodno dobivene ukupne energije

⇒ vratimo se u valnu funkciju :

$$\Psi_n(t,x) = \underbrace{B \cdot C}_{D} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar} \cdot n^2 \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \cdot t}$$

$$\Psi_n^*(t,x) = D^* \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot e^{+\frac{1}{\hbar} \cdot n^2 \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \cdot t}$$

} konjugirano kompleksni broj - (otud plus u eksponentu)

↳ sada znamo kvadrirati :

$$|\Psi_n(t,x)|^2 = |D|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

↑ gustoća vjerojatnosti, pa za vjerojatnost trebamo integrirati

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \dots$$

integriranje supstitucijom

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \frac{a}{2}$$

} ne smijemo zaboraviti konstantu D

$\Rightarrow$ vratimo se u vjerojatnost:

$$1 = \int_0^a |\Psi(t,x)|^2 dx = |D|^2 \cdot \frac{a}{2}$$

↳ odavde izrazimo D:

$$D = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

↳ sada znamo: $\Psi(x) = \frac{\sqrt{2}}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$

$\Rightarrow$ <u>sada je krajnji rezultat:</u>

$$\Psi_n(t,x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

↳ ovo je funkcija koja predstavlja rješenje Schrödingerove jednadžbe za elektron zarobljen u beskonačnoj potencijalnoj jami

⇒ sada možemo izračunati ovaj rezultat za neke realne brojke elektrona u vodikovom atomu:

$$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}\ Js$$

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ kg$$

$$a = 0.5 \cdot 10^{-10}\ m$$

$$E_n = n^2 \cdot 2.4 \cdot 10^{-17}\ J$$

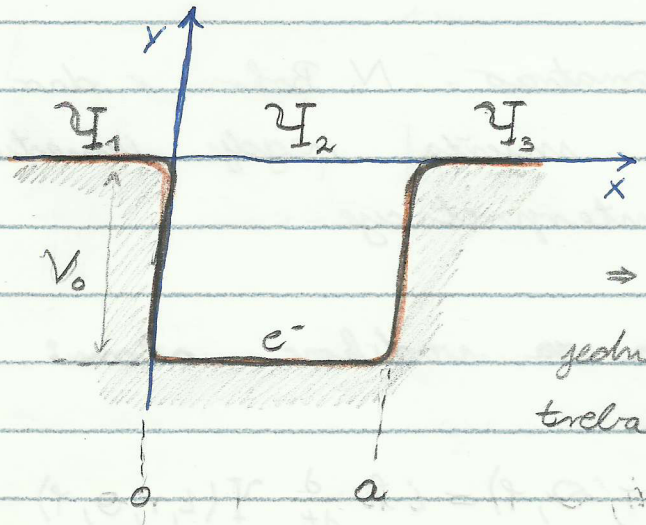
↳ iz ovoga je bio definiran ELEKTRON VOLT:

$$E = q \cdot \Delta U = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 1\ V = 1.6 \cdot 10^{-19}\ J$$

$$1\ eV = 1.6 \cdot 10^{-19}$$

$$E_n = 150\, n^2\ eV$$

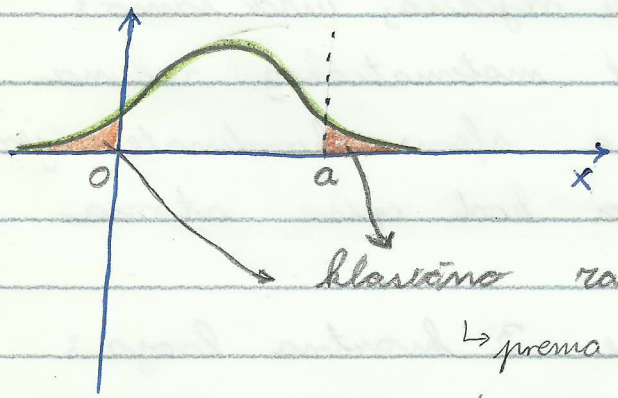
PROBLEM ISKAKANJA ELEKTRONA IZ POTENCIJALNE JAME



⇒ treba rješiti tri Schrödingerove jednadžbe i ta tri rješenja treba zbrojiti

⇒ ukupna jednadžba mora biti glatka i kvadratno integrabilna kako bi fizikalno mogli interpretirati rješenje

⇒ osnovno stanje tog rješenja:



klasično zabranjeno područje

↳ prema klasičnoj fizici, elektron se ovdje ne može naći

⇒ TUNEL EFEKT:

↳ kada elektron nailazi na barijeru koja „ima" veću energiju od samog elektrona, mal dio elektrona prođe kroz barijeru (ovo klasična fizika ne zna objasniti) (ovako radi FET)

VODIKOV ATOM U KVANTNOJ MEHANICI

⇒ vodikov atom je promatrao N. Bohr i dao je neki model koji se smješta negdje između klasične i kvantne interpretacije

⇒ Schrödingerova jednadžba za vodikov atom:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + E_p(r)\right]\Psi(t,r,\Theta,\varphi) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,r,\Theta,\varphi)$$

$\Delta = \nabla\cdot\nabla$ ⟶ Laplaceov operator

$$E_p(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(Ze)e}{r}$$

↳ ovo ne treba znati riješiti, uvid samo:
- kompleksnost matematičkog računa
- prijelaz na sferne koordinate jer nam to odgovara kod opisa atoma

⇒ iz rješavanja nam proizlaze 3 kvantna broja:
- n ; $n = 1, 2, 3, \dots$
- m_ℓ ; $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, 0, 1, \dots, \ell$
- ℓ ; $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$

↳ kod Coulombove potencijalne jame dobili smo samo jedan kvantni broj „n"

↳ također vrijedi energija: $E_n = -\frac{13.6}{n^2}\,eV$

⇒ kada se vodikov atom stavi u magnetsko polje, umjesto jedne linije u „spektru", vide se, na primjer, 3 linije

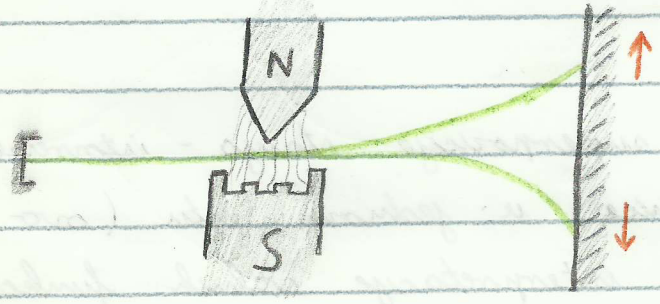
↳ kako to objasniti?



↳ ova pojava se naziva Zemanov efekt i nju opisuje kvantni broj „m_l"

⇒ kada se pusti snop srebrnih atoma kroz jako nehomogeno magnetsko polje, dolazi do cijepanja tog snopa na 2 dijela

↳ kako to objasniti?



⇒ Stern Gelachov pokus.

↳ ovo pokazuje da elektron ima svoj magnetski moment (to nije moment vrtnje oko svoje osi), pa samim time i atom ima svoj magnetski moment - to se naziva SPIN

↳ spin može biti gornji i donji, pa se u kvantnim računalima to koristi za opisivanje bitova

⇒ iz tih pokusa je bilo zaključeno da postoje ukupno 4 kvantna broja:

„n" + „l" + „m_l" + „SPIN"

↳ stoga, ukupno stanje elektrona opisujemo s ove 4 oznake: n, l, m_l, m_s

⇒ W. Pauli formulira ZAKON ISKLJUČENJA:

↳ „dva elektrona u atomu ne mogu imati sve kvantne brojeve jednake"

⇒ elemente iz prve skupine elemenata je jako lagano ionizirati jer imaju samo jedan elektron u vanjskoj ljusci - treba dovesti malu energiju da se taj elektron izbije

⇒ KVANTNA RAČUNALA:

↳ imaju mogućnost superpozicije stanja - istovremena pohrana nule i jedinice u jednom bitu • (ovo se definira pomoću interpretacije valnih funkcija spinova)

NUKLEARNA FIZIKA

⇒ prisjetit se Rutherfordovog modela

↳ on je smatrao da je jezgra točkasta

↳ nadalje, smatrao se odnos masa i naboja:

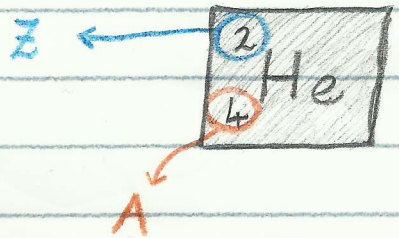
$$|Q(p)| = |Q(e^-)|$$

$$m_p \approx 1900\, m_e$$

⇒ u jezgri se nalaze NUKLEONI, i oni su

- protoni $Q(p^+) = 1.6 \cdot 10^{-19} C$
- neutroni $Q(n) = 0$

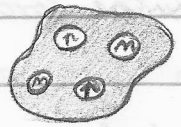
$$A = Z(p^+) + N(n^+)$$



→ α-čestice su helijevi atomi kojima su izgubili dva elektrona //

⇒ da bi se jezgra držala zajedno, jaka nuklearna sila mora biti jednaka Coulombovoj odbojnoj električnoj sili

ENERGIJA VEZANJA

$p \rightarrow m_p$
$n \rightarrow m_n$
$\left.\begin{matrix} p \rightarrow m_p \\ n \rightarrow m_n \end{matrix}\right\}$ $He^{2+} = 2m_p + 2m_n =$  $= m_{He}$

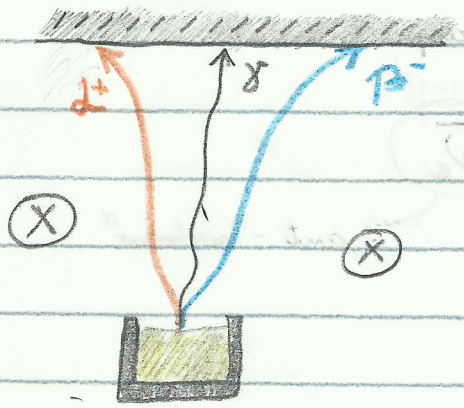
↳ eksperimentom se pokazalo sljedeće:

$$m_{He} < 2m_p + 2m_n$$

↳ ovo saznanje se naziva DEFEKT MASE

↳ ta razlika mase je posljedica pretvorbe mase u energiju kako bi se jezgra mogla vezati

ZRAČENJA I RASPADI



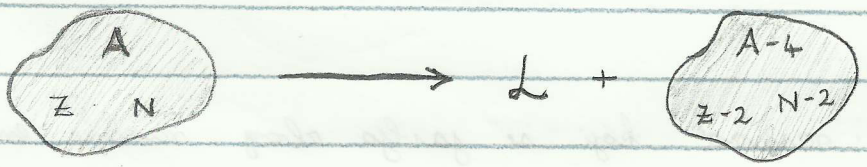
⇒ na ovaj način se utvrdio polaritet čestica nastalih raspadom

⇒ zašto se raspad događaju?

↳ zbog nejednakosti Coulombove odbojne sile i jake nuklearne sile

↳ „najpovoljnija" struktura koju jezgra može emitirati je „α" - čestica

⇒ „α" - RASPAD:



↳ stoga, „α" čestica je: ^{2+}He (ima strukturu $2p^{+} + 2n^{0}$)

PR: Raspad radija:

$$^{226}_{88p^{+}138n}Ra \longrightarrow \alpha + {}^{222}_{86p^{+}136n}Rn$$

$m = M \cdot n \qquad N = n \cdot N_A$

⇒ „β" - RASPAD:

↳ „beta zrake" su zapravo elektron

↳ primjer β-raspada je raspad neutrona:

$$n \longrightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu}_e$$

„anti-neutrino"

PR: Raspad ugljika:

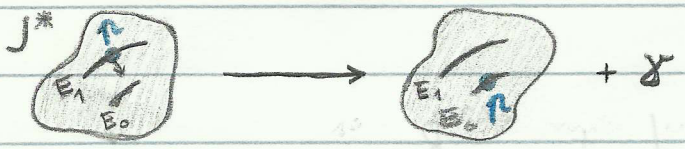
$$^{14}_{6p+8n}C \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e + ^{14}_{7p+7n}N$$

↳ neutrino je bilo teško otkriti, al su ga uspjeli pronać

↳ problem je bio u nedostatku ukupne energije, a neutrino je jako teško otkriti jer prolaze kroz gotovo sve površine i imaju jako malo masu (puno manju od mase elektrona)

⇒ „γ" - RASPAD:

↳ ovo je raspad koji se javlja zbog razlike energije između različitih energetskih razina u jezgri (npr. proton prilikom pražnja iz više u nižu energetsku razinu emitira γ česticu)



ZAKON RADIOAKTIVNOG RASPADA

⇒ Avogadrov broj:

$$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$$

↳ broj čestica u jednom molu tvari

⇒ <u>raspadanje</u>:

$t = 0 \Rightarrow N_0$ čestica

$t = t_1 \Rightarrow N_1 = N_0 - \Delta N$

↳ vrijede proporcionalnost:

$$\Delta N \sim N$$

$$\Delta N \sim \Delta t$$

↳ iz rečenog proizlazi jednakost:

$$\boxed{\Delta N = -\lambda N \Delta t}$$

$\lambda \rightarrow$ konstanta karakteristična za materijal

↳ prijedimo na diferencijalni oblik:

$$dN = -\lambda N \, dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt$$

↑ rješavanjem ovih integrala uz početne uvjete dobivamo jednadžbu:

POČETNI UVJETI:

$N(0) = N_0$

$t = 0$

$$\boxed{N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}}$$

⇒ VRIJEME POLURASPADA:

$t = 0 \longrightarrow N_0$

$T_{1/2} \longrightarrow \frac{N_0}{2}$

↳ uvrstimo u dobivenu formulu:

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\lambda T_{1/2}$$

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

⇒ vrijeme za koje se raspadne pola čestica od početnog broja čestica

⇒ AKTIVNOST:

↳ broj raspada u jedinici vremena

$$A(t) = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N(t) = \underbrace{\lambda N_0}_{A_0} e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\lambda t}}$$

↳ aktivnost je korisna u određivanju starosti živih organizama

PRIMJER 11.7 $m = 1\,g$ → masa uzorka KCl-a

$A_0 = 1600$ raspada/s $= 1600$ Bq

$^{40}K \rightarrow 1.18\%$ u normalnom kaliju K

1 bekerel = 1 Bq = 1 raspad/s

$T_{1/2}(^{40}K) = ?$

Z → redni broj
N → broj neutrona
} IZOTOPI → isti Z, različit N

↳ krenemo od formule za aktivnost:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

↳ trebamo dovnati kako je λ iz podataka iz periodnog sustava i dobivenog podatka:

$M(KCl) = 74.55\ g/mol$

$74.55\ g \Rightarrow 1\ mol$; $1\ g \Rightarrow x\ mol$

$1\ mol \Rightarrow N_A$ molekula ; $x\ mol \Rightarrow y$ molekula

$$1 \cdot y = x \cdot N_A \Rightarrow y = \frac{1}{74.55} N_A$$

$$\#(^{40}K) = 1.18\% \cdot y = \frac{1.18}{100} \cdot \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{74.55} = 9.49 \cdot 10^{19} = N_0$$

$$A_0 = \lambda N_0 \Rightarrow \lambda = \frac{A_0}{N_0} = 1.69 \cdot 10^{-17}\ s^{-1}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 1.3 \cdot 10^9\ god$$

ZAD: Ako se pacijentu da odredena količina joda vremena poluraspada $T_{1/2} = 8.1$ dan, koliko će radioaktivnog joda ostati u organizmu nakon 60 dana?

$$N(t_1) = N_0 e^{-\lambda t_1} \qquad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$N(t_1) = N_0 e^{-\ln 2 \cdot \frac{t_1}{T_{1/2}}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_1}{T_{1/2}}} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1/T_{1/2}}$$

$$\frac{N(t_1)}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1/T_{1/2}}$$

$$\frac{N(t_1)}{N_0} = 0.59\,\%$$

ODREĐIVANJE STAROSTI ORGANIZAMA

⇒ otkrila se pravilnost u „aktivnosti" ugljikovih organizama

↳ na jednom gramu ugljika, utvrđena se aktivnost: $A_0 = 15$ raspada/min

↳ ovdje se radi o ugljiku ^{14}C, te se može izračunati njegovo vrijeme poluraspada:

$$T_{1/2}(^{14}C) = 5730 \text{ god}$$

⇒ aktivnost tog ugljika s vremenom opada jer se i sama masa tog ugljika smanjuje

↳ živi organizmi stalno unose taj ugljik, pa se kod njih ta aktivnost ne smanjuje, ali kod mrtvih organizama to nije slučaj

PR: 11.10 Uzorku drveta mase 10 g je ustanovljena aktivnost od 37.5 raspada u minuti. Odredi starost drveta ?

$A_0(10\,g) = 150$ raspada/min

$A_0(1\,g) = 15$ raspada/min

$A(t) = 37.5$ raspada/min

$A(t) = 10 \cdot 15$ raspada/min $\cdot e^{-\lambda t}$

$$-\lambda t = \ln\left(\frac{37.5}{150}\right)$$

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{37.5}{150}\right)$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln\left(\frac{37.5}{150}\right)$$

$t = 11460$ god

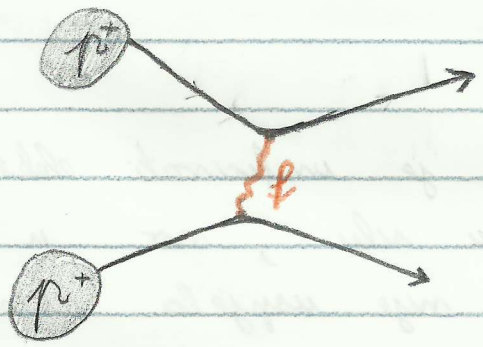
OSNOVNE SILE I ELEMENTARNE ČESTICE

⇒ 4 osnovne sile u prirodi:

- gravitacijska
- elektro-magnetska
- jaka (nuklearna)
- slaba

⇒ prijenosnik sile je foton kod elektro-magnetske sile:

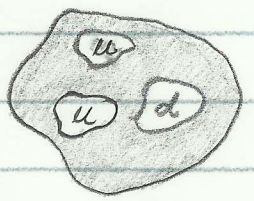
↳ pr. prilikom međudjelovanja protona izmjene se foton između njih



⇒ prijenosnik sile za gravitacijsku silu je graviton

↳ graviton još nije pronađen

⇒ objašnjenje nuklearne sile ljudi su pronašli u otkriću kvarkova



→ tu su se pojavili i **gluoni** koji drže kvarkove zajedno

⇒ slaba sila je objašnjena $W^{\pm}$ i Z^{0} česticama

⇒ **elementarne čestice:**

- leptoni

e^-	μ^-	τ^-	
ν	ν_μ	ν_τ	} pripadajući neutrini

- kvarkovi

u	s	t
d	c	b

↳ ovakav broj i raspored čestica uvjetovan je „standardnim matematičkim modelom"

- prijenosnici sila

foton, graviton, $W^\pm$, Z^0
Higgs-ov boson

⇒ standardni model uspio je unificirati elektromagnetsku silu, jaku silu i slabu silu, no u to se gravitacijska sila još nije uspjela uklopiti